WILHELM KECS

PRODUSUL DE CONVOLUȚIE ȘI APLICAȚII

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Scanned with OKEN Scanner

Wilhelm Kecs

PRODUSUL DE CONVOLUȚIE ȘI APLICAȚII

C. Zalinescu
24-02-1979

Editura Academiei
Republicii Socialiste România
București, 1978

Scanned with OKEN Scanner

The Convolution Product and Its Applications

Свертка и некоторые её применения

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
71021, Calea Victoriei nr. 125, București, telefon 50 76 80

Scanned with OKEN Scanner

Prefață

Între diferitele tipuri de compuneri de funcții, datorită proprietăților importante pe care le posedă, produsul de convoluție ocupă un loc central.

Extinderea produsului de convoluție în spațiul distribuțiilor a creat cadrul natural pentru lărgirea și îmbogățirea considerabilă a proprietăților lui, fapt care a determinat ca acesta să devină un instrument matematic puternic de investigație în domeniul calculului simbolic, al aproximării distribuțiilor, al studiului seriilor Fourier precum și al rezolvării unor probleme la limită.

Eficacitatea produsului de convoluție se reflectă în special prin proprietățile sale privind transformata Fourier și Laplace precum și în exprimarea soluțiilor ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți.

Rezultate fundamentale legate de produsul de convoluție și aplicațiile lui se datoresc lui: L. Ehrenpreis, I. M. Gelfand, L. Hörmander, J. Lions, B. Malgrange, J. Mikusiński, L. Schwartz, G. E. Silov.

În cadrul acestei lucrări se prezintă în mod sistematic proprietățile fundamentale ale produsului de convoluție pentru funcții și distribuții, ilustrîndu-se modul lui de intervenție la studiul unor ecuații ale fizicii matematice, al solidului deformabil, al sistemelor de puncte, al circuitelor electrice și altele. În scopul unității lucrării în primul capitol se dau noțiunile de bază privind construcția spațiilor vectoriale topologice, punînd un accent deosebit pe spațiile local convexe care stau la baza teoriei distribuțiilor în cadrul căreia se prezintă proprietățile și aplicațiile produsului de convoluție.

Pe baza acestor cunoștințe se dau noțiunile și unele formule fundamentale din teoria distribuțiilor.

Pe lîngă problemele teoretice legate de produsul de convoluție am urmărit constant ilustrarea utilizării lui precum și evidențierea importanței algebrei de convoluție K'_+ în legătură cu studiul ecuațiilor diferențiale, a determinării soluțiilor sistemelor vibrante liniare și cu studiul solidului vîscoelastic și al circuitelor cuplate inductiv.

În cadrul expunerii sînt inserate și rezultatele originale obținute de autor.

Bibliografia prezentată la sfîrșitul lucrării reprezintă o parte din literatura consultată, legată direct sau indirect de subiectul tratat.

Prin conținutul său, lucrarea se adresează cercetătorilor din domeniul matematicilor pure și aplicate, inginerilor din domeniul mecanicii și electrotehnicii, precum și cadrelor didactice și studenților.

Autorul

Scanned with OKEN Scanner

Cuprinsul

Capitolul 1. **Spaţii vectoriale topologice** 9

§ 1. Mulţimi remarcabile în spaţii vectoriale 9
1. Introducere 9
2. Mulţimi remarcabile în spaţii vectoriale 9

§ 2. Spaţii vectoriale normate. Spaţii metrice 14
1. Funcţionale liniare 14
2. Seminormă. Proprietăţi 15

§ 3. Spaţii vectoriale topologice 21
1. Elemente de topologie generală 21
2. Topologia spaţiilor metrice 22
3. Axiomele spaţiilor vectoriale topologice. Spaţii local convexe 24

§ 4. Spaţii de funcţii 28
1. Clase de funcţii, generalităţi şi notaţii. Spaţiul L^p . . 28
2. Spaţii fundamentale 33

§ 5. Spaţiul distribuţiilor 40

Capitolul 2. **Produsul de convoluţie** 53

§ 1. Produsul de convoluţie pentru funcţii 53
1. Convoluţia în spaţii L^p. Proprietăţi generale 53
2. Regularizarea şi aproximarea funcţiilor cu ajutorul produsului de convoluţie 62
3. Algebra de convoluţie $C(R_+)$ 70

§ 2. Produsul de convoluţie pentru distribuţii 77
1. Produsul direct pentru funcţii şi distribuţii. Proprietăţi generale 77
2. Produsul de convoluţie pentru distribuţii. Criterii de existenţă. Proprietăţi generale 83
3. Regularizarea şi aproximarea distribuţiilor 91
4. Convoluţia distribuţiilor depinzînd de un parametru . 99

Capitolul 3. **Transformări integrale şi distribuţii periodice** . . . 109

§ 1. Transformata Fourier 109
1. Transformata Fourier pentru funcţii. Transformata Fourier a spaţiului S 109
2. Transformata Fourier a distribuţiilor din spaţiul S' . 119

Scanned with OKEN Scanner

§ 2. Transformata Laplace 124
1. Transformata Laplace pentru funcții și distribuții . . 124
§ 3. Distribuții periodice 129
1. Introducere 129
2. Funcții periodice, transformata periodică și partiția periodică a unității 130
3. Serii trigonometrice și distribuții periodice. Transformata periodică a distribuțiilor 135
4. Serii Fourier pentru distribuții 142

Capitolul 4. **Ecuații de convoluție** 149

§ 1. Algebre și ecuații de convoluție. Proprietăți generale 149
§ 2. Ecuații de convoluție în K'_+ 155
1. Algebra de convoluție K'_+ 155
2. Aplicații ale algebrei de convoluție K'_+ la ecuații diferențiale ordinare 158
3. Ecuații integro-diferențiale de tip convolutiv 172
§ 3. Ecuații cu derivate parțiale. Soluții fundamentale și rezolvarea problemei Cauchy 178
§ 4. Soluția fundamentală și problema Cauchy pentru ecuația undelor, ecuația telegrafiștilor pentru linii fără distorsiuni și ecuația căldurii 186
1. Ecuația undelor 186
2. Ecuația telegrafiștilor pentru linii fără distrosiuni . . 193
3. Ecuația căldurii 195

Capitolul 5. **Aplicații ale produsului de convoluție** 197

§ 1. Aplicații în electrotehnică 197
1. Potențialul de volum și de suprafață al cîmpului electrostatic 197
2. Circuite cuplate inductiv 200
3. Cvadripoli 207
§ 2. Aplicații în mecanică 210
1. Sisteme vibrante liniare 210
2. Soluția fundamentală corespunzătoare rezolvării în deplasări pentru problema statică a spațiului elastic . . 215
3. Solidul viscoelastic 219

Bibliografie 225
The Convolution Product and Its Applications (Abstract) 229
The Convolution Product and Its Applications (Contents) 230

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 1

Spaţii vectoriale topologice

§ 1. Mulţimi remarcabile în spaţii vectoriale

1. Introducere

Studiul diferitelor probleme este în general indisolubil legat de introducerea anumitor clase de funcţii ale căror proprietăţi oferă cadrul natural pentru elaborarea unei teorii şi obţinerii de noi rezultate.

Pentru nevoile teoriei distribuţiilor în cadrul căreia se vor studia proprietăţile şi aplicaţiile produsului de convoluţie, spaţiile vectoriale normate sînt insuficiente. Din acest motiv vom considera cîteva spaţii de funcţii înzestrate cu o structură de convergenţă a căror topologie asociată este aceea a spaţiilor numărabil normate sau a reuniunilor de asemenea spaţii. Toate aceste spaţii constituie cazuri particulare de spaţii local convexe.

2. Mulţimi remarcabile în spaţii vectoriale

Vom nota prin Γ fie corpul R al numerelor reale, fie corpul C al numerelor complexe. Fie E o mulţime oarecare de obiecte abstracte.

DEFINIŢIA 1. Mulţimea E se numeşte spaţiu vectorial în raport cu Γ şi se notează (E, Γ), dacă în E avem definite două operaţii: una de adunare, aplicaţia $(x, y) \to x+y$ a lui $E \times E$ în E şi alta de înmulţire cu numere (scalari) din Γ, aplicaţia $(\lambda, x) \to \lambda x$ a lui $\Gamma \times E$ în E, cu următoarele proprietăţi:

1° $\underset{x,y\in E}{\forall} \; x+y=y+x$

2° $\underset{x,y,z\in E}{\forall} \; (x+y)+z=x+(y+z)$

3° $\underset{0\in E}{\exists} \; \underset{x\in E}{\forall} \; x+0=x$ (0 se numeşte element nul)

4° $\underset{x\in E}{\forall} \; \underset{x'=-x\in E}{\exists} \; x+(-x)=0$

5° $\underset{x\in E}{\forall} \; 1\cdot x=x$

6° $\underset{\lambda,\mu\in\Gamma}{\forall} \; \underset{x\in E}{\forall} \; \lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$

7° $\underset{\lambda,\mu\in\Gamma}{\forall} \; \underset{x\in E}{\forall} \; (\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$

8° $\underset{\lambda\in\Gamma}{\forall} \; \underset{x,y\in E}{\forall} \; \lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y.$

Spaţiul vectorial (E, Γ) se va numi real dacă $\Gamma = R$ şi complex dacă $\Gamma = C$.

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 2. Se numește subspațiu (E', Γ) al unui spațiu vectorial (E, Γ), o mulțime de elemente din E, care formează un spațiu vectorial în raport cu operațiile de adunare și de înmulțire cu scalari din Γ definite în E.

Fie (E, Γ) un spațiu vectorial iar A, B submulțimi ale lui E.

DEFINIȚIA 3. Se numește suma aritmetică $A + B$ a mulțimilor A și B mulțimea:

$$A + B = \{z \in E ; \underset{\substack{x \in A \\ y \in B}}{\exists} z = x + y\}.$$

În particular dacă mulțimea A conține un singur element a deci $A = \{a\}$, atunci vom nota:

$$\{a\} + B = a + B = \tau_a B$$

și vom spune că mulțimea $a + B$ reprezintă translatata mulțimii B de vector a. Simbolul τ_a reprezintă operatorul de translație de vector $a \in (E, \Gamma)$ și este definit de aplicația $\tau_a : (E, \Gamma) \to (E, \Gamma)$ cu $\tau_a x = x + a$, $x \in (E, \Gamma)$.

Analog se definește diferența aritmetică $A - B$.

DEFINIȚIA 4. Produsul λA dintre numărul complex λ și mulțimea A reprezintă mulțimea:

$$\lambda A = \{z \in E ; \underset{x \in A}{\exists} z = \lambda x\}.$$

Se demonstrează ușor următoarele proprietăți

$$A + B = B + A ; \quad (A + B) + C = A + (B + C) \tag{1}$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B ; \quad A \subset B \Rightarrow \lambda A \subset \lambda B \tag{2}$$

$$\lambda(A \cap B) = \lambda A \cap \lambda B ; \quad \lambda(A \cup B) = \lambda A \cup \lambda B \tag{3}$$

$$(\lambda + \mu) A \subset \lambda A + \mu A. \tag{4}$$

Pentru familii de mulțimi avem relațiile:

$$\lambda(\bigcap_i A_i) = \bigcap_i (\lambda A_i) ; \quad \lambda(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i (\lambda A_i) \tag{5}$$

$$(\bigcap_i A_i) + (\bigcap_i B_i) \subset \bigcap_i (A_i + B_i) \tag{6}$$

$$A_i \subset B_i \Rightarrow \bigcup_i A_i \subset \bigcup_i B_i \quad \text{și} \quad \bigcap_i A_i \subset \bigcap_i B_i. \tag{7}$$

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, de exemplu, pentru verificarea proprietății (4) avem :

$$\lambda A + \mu A = \{z \in E ; \underset{\substack{x \in A \\ y \in A}}{\exists} z = \lambda x + \mu y\}$$

$$(\lambda + \mu) A = \{z \in E ; \underset{x \in A}{\exists} z = (\lambda + \mu) x\}.$$

Deoarece $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu y$ dacă $x = y$, rezultă

$$(\lambda + \mu) A \subset \lambda A + \mu A.$$

Fie X_1 o mulțime de numere reale mărginită superior ($\underset{M \in R}{\exists} \underset{x \in X_1}{\forall} x \leqslant M$). Atunci există un singur număr $M^* = \sup X_1$ numit margine superioară a mulțimii X_1 care satisface proprietățile :

$$\text{i) } \underset{x \in X_1}{\forall} x \leqslant M^* \qquad (8)$$

$$\text{ii) } \underset{a \in R}{\forall} a < M^* \quad \underset{x \in X_1}{\exists} x \in (a, M^*].$$

Similar dacă X_2 este o mulțime de numere reale mărginită inferior ($\underset{m \in R}{\exists} \underset{x \in X_2}{\forall} x \geqslant m$), atunci există un singur număr $m^* = \inf X_2$ numit margine inferioară a mulțimii X_2 care satisface proprietățile :

$$\text{i}_1) \underset{x \in X_2}{\forall} x \geqslant m^* \qquad (9)$$

$$\text{i}_1\text{i}_1) \underset{b \in R}{\forall} b > m^* \quad \underset{x \in X_2}{\exists} x \in [m^*, b).$$

Dacă A, B sînt mulțimi mărginite superior (inferior) atunci au loc proprietățile :

$$\sup (A + B) = \sup A + \sup B \qquad (10)$$

$$\inf (A + B) = \inf A + \inf B. \qquad (10')$$

Într-adevăr, notînd $\sup A = M_1^*$, $\sup B = M_2^*$, atunci

$$\underset{\varepsilon \in R^+}{\forall} \underset{\substack{x_1 \in A \\ y_1 \in B}}{\exists} : x_1 > M_1^* - \frac{\varepsilon}{2}, \quad y_1 > M_2^* - \frac{\varepsilon}{2}$$

de unde

$$x_1 + y_1 > (M_1^* + M_2^*) - \varepsilon. \qquad (11)$$

Pe de altă parte, deoarece :

$$\underset{\substack{x \in A \\ y \in B}}{\forall} : x \leqslant M_1^*, \quad y \leqslant M_2^*$$

obținem $x + y \leqslant M_1^* + M_2^*$ care împreună cu relația (11) ne arată că numărul $M^* = M_1^* + M_2^*$ reprezintă marginea superioară a mulțimii $A + B$.

Analog se demonstrează proprietatea (10').

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 5. Numim produs aritmetic $A \cdot B$ a două mulțimi de numere reale mulțimea :

$$A \cdot B = \{z \in R ; \underset{\substack{x \in A \\ y \in B}}{\exists} z = xy\}.$$

În particular dacă $A, B \subset R_+$[1] și sînt mărginite superior, are loc proprietatea :

$$\sup (A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B. \tag{12}$$

Analog, dacă A și B sînt mărginite inferior avem :

$$\inf \cdot (A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B. \tag{13}$$

Într-adevăr, punînd : $\sup A = M_1^*$, $\sup B = M_2^*$ atunci

$$\underset{\varepsilon \in R+}{\forall} \underset{\substack{x_1 \in A \\ y_1 \in B}}{\exists} : x_1 > M_1^* - \varepsilon, \quad y_1 > M_2^* - \varepsilon$$

de unde obținem :

$$x_1 y_1 > M_1^* M_2^* - \varepsilon (M_1^* + M_2^*). \tag{14}$$

Deoarece

$$\underset{\substack{x \in A \\ y \in B}}{\forall} : x \leqslant M_1^*, \quad y \leqslant M_2^*$$

avem :

$$xy \leqslant M_1^* M_2^*$$

care împreună cu relația (14) demonstrează faptul că numărul $M^* = M_1^* M_2^*$ este marginea superioară a mulțimii $A.B$. Analog se procedează și pentru demonstrația proprietății (13).

DEFINIȚIA 6. Fie (E, Γ) un spațiu vectorial și $A \subset E$. Vom spune că A este o mulțime convexă dacă și numai dacă

$$\underset{\lambda \in [0,\, 1]}{\forall} \Rightarrow \lambda A + (1 - \lambda) A \subset A.$$

PROPOZIȚIA 1. *Dacă A este o mulțime convexă atunci*

$$\underset{\lambda,\, \mu \in R_+}{\forall} \textit{ avem } (\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A. \tag{15}$$

Demonstrație. În baza relației (4) va fi suficient să arătăm că $(\lambda + \mu) A \supset \lambda A + \mu A$. Deoarece pentru $\lambda = \mu = 0$ relația (15) este evidentă, considerăm $\lambda, \mu > 0$ și notăm :

$$\alpha = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad \beta = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

---

[1] $R+$ reprezintă mulțimea numerelor reale pozitive, respectiv pozitive sau nule.

Deoarece $\alpha, \beta > 0$ şi $\alpha + \beta = 1$, pe baza definiţiei convexităţii unei mulţimi şi a relaţiei (2) avem :

$$(\lambda + \mu)\,\alpha A + (\lambda + \mu)\,\beta A = (\lambda + \mu)\,(\alpha A + \beta A) \subset (\lambda + \mu)\,A.$$

Dar cum $(\lambda + \mu)\alpha = \lambda$ şi $(\lambda + \mu)\beta = \mu$ obţinem $\lambda A + \mu A \subset (\lambda + \mu)A$ şi propoziţia este demonstrată.

PROPOZIŢIA 2. *Intersecţia unei familii oarecare de mulţimi convexe este o mulţime convexă.*

Într-adevăr, fie $A = \bigcap_i A_i$, unde A_i sînt mulţimi convexe, deci $\lambda A_i + (1 - \lambda)\,A_i \subset A_i$ pentru $\lambda \in [0, 1]$. Pe baza relaţiilor (5), (6), (7) obţinem :

$$\lambda(\bigcap_i A_i) + (1 - \lambda)\,(\bigcap_i A_i) =$$

$$= \bigcap_i (\lambda A_i) + \bigcap_i (1 - \lambda)\,A_i \subset \bigcap_i [\lambda A_i + (1 - \lambda)\,A_i] \subset \bigcap_i A_i,$$

ceea ce demonstrează convexitatea mulţimii $\bigcap_i A_i$.

DEFINIŢIA 7. Fie (E, Γ) un spaţiu vectorial şi $A \subset E$. Spunem că A este absorbantă în E dacă şi numai dacă

$$\forall_{x \in E}\ \exists_{k_x \in R^+}\ \forall_{\lambda \in \Gamma}\ |\lambda| \leqslant k_x \Rightarrow \lambda x \in A.$$

PROPOZIŢIA 3. *Intersecţia unui număr finit de mulţimi absorbante este o mulţime absorbantă.*

Demonstraţie. Fie A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ mulţimile absorbante din E şi $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Conform definiţiei mulţimilor A_i, $\forall_{x \in E}\ \exists_{k_x^i \in R^+}\ \forall_{\lambda \in \Gamma} |\lambda| \leqslant k_x^i \Rightarrow \lambda x \in A_i$. Notînd $k_x = \inf (k_x^i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ atunci $k_x > 0$ şi avem $\lambda x \in A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ cu $|\lambda| \leqslant k_x$. În consecinţă $\lambda x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, $\forall_{x \in E}\ \forall_{\lambda \in \Gamma} |\lambda| \leqslant k_x$. Deci mulţimea $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ este absorbantă.

DEFINIŢIA 8. Fie (E, Γ) un spaţiu vectorial şi $A \subset E$. Vom spune că A este o mulţime echilibrată dacă şi numai dacă $\forall_{\lambda \in \Gamma} |\lambda| \leqslant 1 \Rightarrow \lambda A \subset A$.

PROPOZIŢIA 4. *Dacă A este o mulţime echilibrată atunci* $\forall_{\lambda, \mu \in \Gamma} |\lambda| \leqslant |\mu|$ *avem* $\lambda A \subset \mu A$.

Într-adevăr pentru $\mu = 0$ relaţia este evidentă.

Pentru $|\lambda| \leqslant |\mu| \neq 0$ avem $\left|\frac{\lambda}{\mu}\right| \leqslant 1$ şi cum A este echilibrată $\frac{\lambda}{\mu} A \subset A$. În baza proprietăţii (2), înmulţind cu μ obţinem $\lambda A \subset \mu A$

PROPOZIŢIA 5. *Dacă A este o mulţime echilibrată atunci* $\forall_{\lambda \in \Gamma}$ *avem* $\lambda A = |\lambda|\,A$.

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr deoarece $|\lambda| \leqslant \|\lambda\|$ și $\|\lambda\| \leqslant |\lambda|$ conform proprietății precedente obținem :

$$\lambda A \subset |\lambda| A \quad \text{și} \quad |\lambda| A \subset \lambda A$$

ceea ce demonstrează propoziția enunțată.

DEFINIȚIA 9. Fie (E, Γ) un spațiu vectorial și $A \subset E$. Spunem că A este o mulțime simetrică dacă și numai dacă $\underset{x \in A}{\forall} \Rightarrow (-x) \in A$, adică $-A = A$.

Observăm imediat că o mulțime echilibrată este și simetrică.

§ 2. Spații vectoriale normate. Spații metrice

1. Funcționale liniare

Fie (E, Γ), (Y, Γ) două spații vectoriale peste același corp de scalari Γ iar $X \subset E$ un subspațiu al lui E. Aplicația $T : X \to Y$ se va numi operator definit pe X și cu valori în Y.

Valoarea operatorului T în punctul $x \in X$ se va nota $T(x) = y \in Y$.

DEFINIȚIA 1. Operatorul $T : X \to Y$, spunem că este un operator liniar dacă și numai dacă

$$\underset{\substack{x_1, x_2 \in X \\ \alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma}}{\forall} T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2). \tag{1}$$

Consecințe :

$$T(0) = 0\,; \quad T(-x) = -T(x), \underset{x \in X}{\forall}. \tag{2}$$

Într-adevăr conform definiției avem

$$T(x) = T(x + 0) = T(x) + T(0) \Rightarrow T(0) = 0.$$

Pentru $x_1 = x$, $x_2 = 0$ și $\alpha_1 = -1$ avem $T(-x) = -T(x)$.

O clasă particulară de operatori liniari o formează funcționalele liniare. Astfel dacă domeniul Y în care operatorul liniar T ia valori este corpul Γ $(Y = \Gamma)$ atunci operatorul $T : X \to \Gamma$ se va numi funcțională liniară. Valoarea unei funcționale liniare T într-un punct $x \in X$ se va nota $T(x) = (T, x)$.

Funcționala liniară T se va numi reală sau complexă după cum valoarea (T, x) este un număr real sau complex.

Fie T_1 și T_2 două funcționale liniare definite respectiv pe subspațiile vectoriale X_1 și X_2 ale lui E.

DEFINIȚIA 2. Funcționalele T_1 și T_2 spunem că sînt egale, $T_1 = T_2$ dacă și numai dacă

$$X_1 = X_2 \quad \text{și} \quad \underset{x \in X_1}{\forall} (T_1, x) = (T_2, x). \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $X_1 \subseteq X_2$ și $\underset{x \in X_1}{\forall} (T_1, x) = (T_2, x)$ atunci spunem că funcționala T_1 este o restricție a lui T_2 relativ la X_1 sau că T_2 este o prelungire a funcționalei T_1.

PROPOZIȚIA 1. *Mulțimea $T(E)$ a tuturor funcționalelor liniare definite pe spațiul vectorial (E, Γ) formează un nou spațiu vectorial numit dualul algebric al lui E și se notează (E^*, Γ).*

Într-adevăr, dacă definim adunarea $T_1 + T_2$ și înmulțirea cu scalari λT prin formulele:

$$\begin{gathered} \underset{T_1, T_2 \in T(E)}{\forall} \underset{x \in E}{\forall} (T_1 + T_2, x) = (T_1, x) + (T_2, x) \\ \underset{T \in T(E)}{\forall} \underset{\substack{\lambda \in \Gamma \\ x \in E}}{\forall} (\lambda T, x) = \lambda (T, x) \end{gathered} \tag{4}$$

iar elementul nul $0 \in T(E)$ prin $(0, x) = 0$, $\underset{x \in E}{\forall}$ atunci $T(E)$ formează un spațiu vectorial peste corpul Γ.

2. Seminormă. Proprietăți

Pentru nevoile teoriei distribuțiilor este necesară considerarea unor spații vectoriale infinit dimensionale care să permită introducerea noțiunii de limită cu proprietatea satisfacerii unicității limitei.

Spațiile de funcții care satisfac aceste exigențe sînt spațiile local convexe care se definesc cu ajutorul unor familii de funcționale numite seminorme. Importanța seminormelor constă și în faptul că posedă proprietățile fundamentale ale modulului și constituie o generalizare a noțiunii de distanță.

DEFINIȚIA 1. Funcționala $p : E \to R$ definită pe spațiul vectorial (E, Γ) și cu valori în R, spnem că este o seminormă pe E dacă ea satisface următoarele condiții:

1° $\underset{x, y \in E}{\forall} p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ (subaditivitatea)

2° $\underset{\substack{x \in E \\ \alpha \in \Gamma}}{\forall} p(\alpha x) = |\alpha| \, p(x)$.

Spațiul vectorial (E, Γ), pe care s-a definit o seminormă spunem că este un spațiu vectorial seminormat și se va nota (E, Γ, p).

Din definiția seminormei se deduc următoarele proprietăți:

$$\underset{\substack{x_i \in E \\ \alpha_i \in \Gamma}}{\forall} p(0) = 0, \; p(-x) = p(x), \; p(x) \geqslant 0 \tag{1}$$

$$|p(x_1) - p(x_2)| \leqslant p(x_1 - x_2) \tag{2}$$

$$p\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \, p(x_i). \tag{3}$$

Într-adevăr, primele două relații din (1) se obțin din proprietatea (2°) a seminormei, dacă considerăm respectiv $\alpha = 0$ și $\alpha = -1$.

Scanned with OKEN Scanner

Apoi din (1°) obţinem

$$0 = p(0) = p(x - x) \leqslant p(x) + p(-x) = 2p(x)$$

de unde $p(x) \geqslant 0$.

De asemenea, deoarece

$$p(x_1) \leqslant p(x_2) + p(x_1 - x_2); \quad p(x_2) \leqslant p(x_1) + p(x_2 - x_1)$$

avem :

$$p(x_1) - p(x_2) \leqslant p(x_1 - x_2), \quad p(x_2) - p(x_1) \leqslant p(x_1 - x_2)$$

de unde

$$|p(x_1) - p(x_2)| \leqslant p(x_1 - x_2).$$

Proprietatea (3) se obţine prin metoda inducţiei complete utilizînd definiţia seminormei.

În general relaţia $p(x)=0$ este verificată de mai multe puncte din E. Dacă însă $p(x)=0 \Rightarrow x=0 \in E$ spunem că seminorma p este o normă şi în loc de $p(x)$ vom nota $\|x\|$. Spaţiul vectorial (E, Γ) pe care avem definită o normă, spunem că este un spaţiu vectorial normat şi se va nota $(E, \Gamma, \|\cdot\|)$.

PROPOZIŢIA 1. *Dacă* $\alpha_i > 0$ *iar* p_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ *sînt seminorme definite pe* (E, Γ) *atunci sînt seminorme şi funcţionalele* :

$$p(x) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i p_i(x), \quad \text{dacă } p(x) \text{ este finită} \tag{4}$$

$$q(x) = \inf_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i p_i(x) \tag{5}$$

$$r(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i(x). \tag{6}$$

Demonstraţie. Din $p_i(x) \geqslant 0$ şi $p_i(0)=0$ avem : $p(x) = \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i p_i(x) \geqslant 0$ şi $p(0)=0$. Condiţia de subaditivitate se verifică uşor deoarece :

$$p(x + y) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i p_i(x + y) \leqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} [\alpha_i p_i(x) + \alpha_i p_i(y)] =$$

$$= \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i p_i(x) + \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i p_i(y)$$

deci $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$. De asemenea avem :

$$\forall_{\lambda \in \Gamma} \; p(\lambda x) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i p_i(\lambda x) = |\lambda| \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i p_i(x) = |\lambda| \, p(x).$$

Cu aceasta proprietatea (4) este demonstrată. Analog se arată şi proprietăţile (5) şi (6).

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 2. O mulțime oarecare X spunem că este un spațiu metric și îl vom nota (X, d), dacă avem definită o aplicație $d : X \times X \to R_+$ numită distanță (metrică) care satisface următoarele proprietăți :

(D_1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(D_2) $\underset{x, y \in X}{\forall} d(x, y) = d(y, x)$

(D_3) $\underset{x, y, z \in X}{\forall} d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Observăm că orice spațiu vectorial normat este un spațiu metric dacă definim distanța prin formula :

$$d(x, y) = \| x - y \|.$$

Fie R^n mulțimea sistemelor ordonate de n numere reale. Vom spune că vectorii $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ și $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ din R^n sînt egali, $x = y$, dacă $x_i = y_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

Punînd :

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n) \qquad \alpha \in R$$

atunci R^n este un spațiu vectorial real. Spațiul R^n înzestrat cu produsul scalar $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ se numește spațiu euclidian real n dimensional. Norma în R^n se definește prin relația :

$$\| x \| = (x, x)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

iar metrica asociată acestei norme, numită normă euclidiană, este dată de expresia

$$d(x, y) = \| x - y \| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

În mod similar se definește spațiul complex n-dimensional C^n. Evident elementele acestui spațiu vor fi sistemele ordonate de n numere complexe în care operațiile de adunare și înmulțire cu numere complexe sînt aceleași ca în R^n. Pe lîngă norma euclidiană (7) definită pe R^n, menționăm și următoarele tipuri de norme pe R^n :

$$\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | x_i |$$

$$\| x \|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} | x_i | \tag{9}$$

$$\| x \|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad p > 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie (X, d) un spaţiu metric şi $x_0 \in X$, $r \in R^+$. Vom numi sferă deschisă în X cu centrul în x_0 şi rază r, mulţimea :

$$U(x_0, r) = \{x \in X ; d(x, x_0) < r\}. \tag{10}$$

În particular dacă $x_0 = 0$, atunci vom nota $U(0, r) = U_r$. Dacă în (10) în loc de $d(x, x_0) < r$ punem $d(x, x_0) \leqslant r$, atunci spunem că $U(x_0, r)$ este o sferă închisă.

Similar, dacă X este un spaţiu normat atunci sfera deschisă este definită de mulţimea :

$$U(x_0, r) = \{x \in X ; \|x - x_0\| < r\}. \tag{11}$$

Un spaţiu vectorial, în general, se poate norma în mai multe moduri. În scopul comparării diferitelor spaţii normate obţinute dintr-un spaţiu vectorial (E, Γ), vom introduce o relaţie de echivalenţă în mulţimea acestor spaţii normate. Vom nota cu $\{E\}$ mulţimea spaţiilor normate obţinute din spaţiul vectorial (E, Γ).

Definiţia 3. O relaţie $\sim$ între elementele unei mulţimi X spunem că este o relaţie de echivalenţă dacă este reflexivă, simetrică şi tranzitivă, adică

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \forall_{x \in X} \; x \sim x \\ &\text{b)} \quad \forall_{x, y \in X} \; x \sim y \Rightarrow y \sim x \\ &\text{c)} \quad \forall_{x, y, z \in X} \; x \sim y \quad \text{şi} \quad y \sim z \Rightarrow x \sim z. \end{aligned} \tag{12}$$

Mulţimea elementelor din X echivalente cu elementul $x \in X$ se numeşte clasa de echivalenţă a lui x şi se notează $[x]$. Mulţimea claselor de echivalenţă se numeşte mulţimea cît a mulţimii X în raport cu relaţia de echivelenţă $\sim$.

Fie E_1, $E_2 \in \{E\}$ două spaţii vectoriale normate avînd normele $x \to \|x\|_1$ şi $x \to \|x\|_2$.

Definiţia 4. Vom spune că E_1 şi E_2 sînt echivalente $(E_1 \sim E_2)$ dacă şi numai dacă

$$\exists_{C_1, C_2 \in R^+} \; \forall_{x \in E} \quad C_1 \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C_2 \|x\|_1 . \tag{13}$$

Justeţea acestei definiţii rezidă în faptul că în mulţimea normelor $\{\|\cdot\|\}$ definite pe (E, Γ) dubla inegalitate (13) reprezintă o relaţie de echivalenţă a normelor $\|\cdot\|_1$ şi $\|\cdot\|_2$. Într-adevăr, reflexivitatea este evidentă prin considerarea constantelor $C_1 = C_2 = 1$ şi deci $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_1$. Pe de altă parte relaţia (13) este echivalentă cu relaţia :

$$C_2^{-1} \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant C_1^{-1} \|x\|_2$$

adică $\|x\|_2 \sim \|x\|_1$ şi deci proprietatea de simetrie a relaţiei de echivalenţă este demonstrată. Pentru a arăta proprietatea de tranzitivitate, considerăm relaţiile :

$$C_1 \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \quad \text{şi} \quad \|x\|_2 \leqslant C_3^{-1} \|x\|_3 \; (\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2 ; \; \|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_3)$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$C_1C_3\|x\|_1 \leqslant \|x\|_3. \tag{14}$$

Similar din

$$\|x\|_3 \leqslant C_4\|x\|_2 \quad \text{şi} \quad \|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1 \; (\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_3 \,;\; \|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2)$$

obţinem

$$\|x\|_3 \leqslant C_2C_4\|x\|_1. \tag{15}$$

Din relaţiile (14) şi (15) rezultă

$$C_1C_3\|x\|_1 \leqslant \|x\|_3 \leqslant C_2C_4\|x\|_1 \quad \text{adică} \quad \|x\|_1 \sim \|x\|_3,$$

deci tranzitivitatea este demonstrată.

În felul acesta două norme definite pe spaţiul vectorial (E, Γ) sînt echivalente dacă satisfac inegalităţile (13) şi conform definiţiei 4 echivalenţa normelor implică echivalenţa celor două spaţii vectoriale normate.

După cum vom arăta, normele echivalente definite pe un spaţiu vectorial determină aceeaşi structură de convergenţă şi aceeaşi topologie, ceea ce justifică denumirea de spaţii vectoriale normate echivalente.

Am văzut în §1 că dintre mulţimile remarcabile ale unui spaţiu vectorial au fost prezentate mulţimile convexe, absorbante şi mulţimile echilibrate. Între aceste mulţimi şi seminormele definite pe un spaţiu vectorial există o strînsă dependenţă.

Fie p o seminormă definită pe spaţiul vectorial (E, Γ) şi $r \in R^+$.

DEFINIŢIA 5. Numim bulă deschisă de rază r asociată seminormei p pe spaţiul vectorial (E, Γ), mulţimea:

$$U_r = \{x \in E \,;\; p(x) < r\}. \tag{16}$$

Dacă în loc de $p(x) < r$ punem $p(x) \leqslant r$, vom spune că U_r este o bulă închisă asociată seminormei p.

În cele ce urmează prin bulă vom înţelege întotdeauna bula deschisă. În particular dacă seminorma p este o normă ($p = \|\cdot\|$) atunci bula deschisă (închisă) de rază r este o sferă deschisă (închisă) cu centrul în originea 0 a spaţiului vectorial (E, Γ).

PROPOZIŢIA 2. *Orice bulă într-un spaţiu vectorial seminormat* (E, Γ, p) *este o mulţime convexă, echilibrată şi absorbantă în* E.

Demonstraţie. Fie U_r o bulă deschisă de rază r asociată seminormei p. Atunci $\underset{x,\, y \in U_r}{\forall} p(x) < r,\ p(y) < r.$

Pentru $\lambda \in [0, 1]$, aplicînd proprietăţile seminormei avem:

$$p[\lambda x + (1 - \lambda)\, y] \leqslant \lambda p(x) + (1 - \lambda)\, p(y) < r$$

adică $\lambda x + (1 - \lambda)\, y \in U_r$ şi convexitatea bulei U_r este demonstrată. Pe de altă parte $\underset{\alpha \in \Gamma}{\forall} |\alpha| \leqslant 1$ avem: $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x) < r$ adică $\alpha x \in U_r$, deci U_r este o mulţime echilibrată deoarece $\alpha U_r \subset U_r$, pentru $|\alpha| \leqslant 1$.

Să arătăm că U_r este absorbantă în E. Observăm că

$$\underset{x \in E}{\forall} p(x) = 0 \Rightarrow \underset{\lambda \in \Gamma}{\forall} p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x) = 0 \quad \text{deci} \quad \lambda x \in U_r.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\underset{x\in E}{\forall} p(x)\neq 0$, considerăm $k_x\in\left(0,\frac{r}{p(x)}\right)$ şi atunci pentru aceste puncte din E, $\underset{\lambda\in\Gamma}{\forall}|\lambda|\leqslant k_k\Rightarrow p(\lambda x)=|\lambda|p(x)<r$. În consecinţă submulţimea U_r din E este absorbantă. Cu aceasta propoziţia este demonstrată.

Pe baza acestei proprietăţi rezultă că orice sferă dintr-un spaţiu vectorial normat este o mulţime convexă, echilibrată şi absorbantă.

Cu ajutorul mulţimilor convexe, echilibrate şi absorbante dintr-un spaţiu vectorial (E, Γ) se poate defini o seminormă.

Fie $A\subset E$ o mulţime absorbantă din spaţiul vectorial (E, Γ). Atunci $\underset{x\in E}{\forall}\ \underset{\lambda\in R^+}{\exists} x\in\lambda A$. În adevăr, conform definiţiei mulţimilor absorbante $\underset{x\in E}{\forall}\ \underset{k_x\in R^+}{\exists}\ \underset{\lambda\in\Gamma}{\forall}|\lambda|\leqslant k_x\Rightarrow\lambda x\in A$. Considerînd $\lambda\neq 0$ atunci $\lambda x\in A$ este echivalent cu $x\in\lambda^{-1}A$ şi punînd $\lambda^{-1}=\mu>0$ înseamnă că există $\mu>0$ astfel încît $x\in\mu A$. Aceasta permite introducerea funcţionalei : $p_A : E\to R_+$ definită prin formula :

$$p_A(x)=\inf_{x\in\lambda A}|\lambda|. \tag{17}$$

Această funcţională se numeşte funcţionala lui Minkowski asociată mulţimii A. Mulţimea A este suportul funcţionalei. Se observă imediat că $p_A(x)\geqslant 0$ şi că $p_A(0)=0$, deoarece $\underset{\lambda\in\Gamma}{\forall}\lambda 0=0$ şi cum A este absorbantă rezultă $0\in A$, deci în baza relaţiei (17) avem $p_A(0)=0$.

Propoziţia 3. *Dacă $A\subset E$ este o mulţime convexă, echilibrată şi absorbantă din spaţiul vectorial (E, Γ), atunci funcţionala lui Minkowski (17) este o seminormă pe (E, Γ).*

Demonstraţie. $\underset{x,\,y\in E}{\forall}$ vom pune $p_A(x)=\alpha_1$, $p_A(y)=\alpha_2$ şi conform lui (17) $\underset{\varepsilon\in R^+}{\forall}$ avem $x\in(\alpha_1+\varepsilon)A$, $y\in(\alpha_2+\varepsilon)A$ şi deci $x+y\in(\alpha_1+\varepsilon)A+(\alpha_2+\varepsilon)A$. Deoarece A este convexă în baza propoziţiei 1, §1 avem $x+y\in(\alpha_1+\alpha_2+2\varepsilon)A$ şi deci conform lui (17) $p_A(x+y)\leqslant\alpha_1+\alpha_2+2\varepsilon=p_A(x)+p_A(y)+2\varepsilon$.

Cum ε este arbitrar obţinem $p_A(x+y)\leqslant p_A(x)+p_A(y)$ şi astfel proprietatea de subaditivitate a seminormei este dovedită. Pe de altă parte, A fiind echilibrată, datorită propoziţiei 5, §1, $\underset{\lambda\in\Gamma}{\forall}\lambda A=|\lambda|A$. Atunci $\underset{\alpha\in\Gamma}{\forall}\alpha\neq 0\ \underset{x\in E}{\forall}p_A(\alpha x)=\inf_{\alpha x\in\lambda A}|\lambda|=\inf_{x\in\frac{\lambda}{\alpha}A}|\lambda|$. Dar cum $\inf_{x\in\frac{\lambda}{\alpha}A}|\alpha|\cdot\left|\frac{\lambda}{\alpha}\right|=|\alpha|\,p_A(x)$ obţinem : $p_A(\alpha x)=|\alpha|\,p_A(x)$ deci şi a doua proprietate a seminormei este demonstrată.

Propoziţia 4. *Dacă $A\subset E$ este o mulţime absorbantă şi convexă a spaţiului vectorial (E, Γ) şi $x\notin A$ atunci $p_A(x)\geqslant 1$.*

Demonstraţie. Într-adevăr presupunînd contrariul, adică $x\notin A$ şi $p_A(x)<1$, atunci conform relaţiei (17) există $0<\alpha<1$ astfel încît $x\in\alpha A$, adică $\frac{x}{\alpha}\in A$. Deoarece A este absorbantă, $0\in A$. A fiind şi convexă, avem $\alpha\left(\frac{x}{\alpha}\right)+(1-\alpha)\,0=x\in A$, ceea ce contrazice ipoteza $x\notin A$.

§ 3. Spaţii vectoriale topologice

1. Elemente de topologie generală

DEFINIŢIA 1. Fie X o mulţime oarecare. Numim topologie pe X orice mulţime τ de părţi ale lui X care verifică următoarele proprietăţi:

(T_1) $\Phi,\ X \in \tau$

(T_2) $\underset{D_i \in X}{\forall} \bigcup_i D_i \in \tau \quad i \in I,\ I$ mulţime de indici.

(T_3) $\underset{D_i \in X}{\forall} \bigcap_{i=1}^{n} D_i \in \tau$

Cuplul (X, τ) se numeşte spaţiu topologic. Uneori vom spune simplu: spaţiul topologic X. Mulţimile $D \in \tau$ se numesc mulţimi deschise ale spaţiului topologic (X, τ), iar elementele lui X puncte. Mulţimea vidă se consideră mulţime deschisă.

O mulţime A dintr-un spaţiu topologic X este deschisă dacă şi numai dacă $\underset{x \in A}{\forall}\ \underset{D_x \in \tau}{\exists}\ x \in D_x \subset A$. O mulţime V dintr-un spaţiu topologic X se numeşte vecinătate a unui punct $x \in X$ dacă $\underset{D_x \in \tau}{\exists}\ x \in D_x \subset V$. Mulţimea A dintr-un spaţiu topologic X spunem că este o mulţime închisă dacă complementara sa $\complement A$ este deschisă. Fie U_x şi U_y mulţimile de vecinătăţi ale punctelor $x, y \in X$, numite şi sistemele de vecinătăţi ale punctelor x şi y.

DEFINIŢIA 2. Spunem că spaţiul topologic (X, τ) este separat dacă satisface axioma separabilităţii lui Hausdorff:

$$\underset{x, y \in X}{\forall}\ x \neq y\ \underset{\substack{D_1 \in U_x \\ D_2 \in U_y}}{\exists}\ D_1 \cap D_2 = \Phi.$$

Un asemenea spaţiu se mai numeşte spaţiu Hausdorff iar topologia lui, topologie separată.

DEFINIŢIA 3. Spunem că o familie $\mathscr{V}_x \subset U_x$ de vecinătăţi ale unui punct x din spaţiul topologic X reprezintă un sistem fundamental de vecinătăţi sau o bază locală de vecinătăţi a punctului x dacă

$$\underset{V \in U_x}{\forall}\ \underset{V_1 \in \mathscr{V}_x}{\exists}\ V_1 \subset V.$$

In acest fel o topologie pe o mulţime X se poate defini cu ajutorul sistemelor fundamentale de vecinătăţi ale punctelor mulţimii X. Cu ajutorul noţiunii de vecinătate a unui punct într-un spaţiu topologic X putem introduce noţiunea de şir convergent.

DEFINIŢIA 4. Fie (X, τ) un spaţiu topologic şi şirul $f: N \to X$, $f(n) = x_n$. Şirul f converge către punctul $x_0 \in X$ (sau are limita x_0) şi vom scrie: $x_0 = \lim_n x_n$ dacă şi numai dacă:

$$\underset{V \in U_{x_0}}{\forall}\ \underset{n_0 \in N}{\exists}\ \underset{n \in N}{\forall}\ n_0 \leqslant n \Rightarrow x_n \in V$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu alte cuvinte, în afara oricărei vecinătăţi V a punctului x_0 există un număr finit de termeni ai şirului (x_n).

PROPOZIŢIA 1. *Într-un spaţiu Hausdorff, un şir dacă are o limită, aceasta este unică.*

Demonstraţie. Să presupunem că şirul (x_n) ar avea două limite distincte a_1 şi a_2. Atunci deoarece spaţiul este separat $\exists\limits_{\substack{V_{a_1}\in U_{a_1}\\ V_{a_2}\in U_{a_2}}} V_{a_1}\cap V_{a_2}=\Phi$ şi cum $x_n\in V_{a_1}$ pentru $n\geqslant n_1$, iar $x_n\in V_{a_2}$ pentru $n\geqslant n_2$. Considerînd $n_0=\max(n_1, n_2)$ avem $x_n\in V_{a_1}\cap V_{a_2}$ pentru $n\geqslant n_0$. Aceasta contrazice ipoteza: $V_{a_1}\cap V_{a_2}=\Phi$, de unde concluzia: $a_1=a_2$.

Fie τ_1 şi τ_2 două topologii definite pe mulţimea X. Dacă $\tau_1\subset\tau_2$ vom spune că τ_2 este mai fină decît τ_1 şi vom nota: $\tau_1\prec\tau_2$. Dacă $\tau_1\prec\tau_2$ şi $\tau_1\neq\tau_2$ se spune că τ_2 este strict mai fină decît τ_1. Se mai spune uneori că topologia τ_1 este mai slabă decît topologia τ_2 sau că topologia τ_2 este mai tare decît topologia τ_1. Pentru ca topologia τ_1 să fie mai slabă decît topologia τ_2 este necesar şi suficient ca pentru orice $x\in X$, orice vecinătate a lui x în topologia τ_1 să fie o vecinătate a lui x în topologia τ_2.

PROPOZIŢIA 2. *Fie* (X_1, τ_1), (X_2, τ_2) *două spaţii topologice şi* $X=X_1\times X_2$ *produsul lor direct (cartezian). Atunci mulţimea de părţi:*

$$\tau=\tau_1\times\tau_2=\{A\subset X_1\times X_2;\ \forall_{x\in A}\ \exists_{\substack{A_1\in\tau_1\\ A_2\in\tau_2}}\ x\in A_1\times A_2\subset A\}$$

este o topologie pe X *numită topologia produs, iar spaţiul topologic* $(X_1\times X_2, \tau_1\times\tau_2)$ *se numeşte produsul direct al spaţiilor topologice* (X_1, τ_1) *şi* (X_2, τ_2).

PROPOZIŢIA 3. *Fie* (X, τ) *un spaţiu topologic şi* $A\subset X$. *Mulţimea părţilor lui* A, $\tau_A=\{E, E=A\cap D, D\in\tau\}$ *este o topologie pe mulţimea* $A\subset X$ *numită topologia indusă de* τ *pe* A *sau urma lui* τ *pe* A.

Cuplul (A, τ_A) se numeşte subspaţiu topologic al spaţiului topologic (X, τ). În general dacă (X_1, τ_1) şi (X, τ) sînt două spaţii topologice, atunci spunem că (X_1, τ_1) este un subspaţiu topologic a lui (X, τ) dacă $X_1\subset X$ şi $\tau_1=\tau_{X_1}$.

2. Topologia spaţiilor metrice

Fie (X, d) un spaţiu metric şi $U(x, r)$ sferele deschise I.2.2.10. iar $\mathscr{P}(X)$ mulţimea părţilor lui X.

PROPOZIŢIA 1. *Mulţimea de părţi* τ_d *a spaţiului metric* (X, d) *definită prin relaţia:*

$$\tau_d=\{V\in\mathscr{P}(X);\ \forall_{x\in V}\ \exists_{r\in R^+}\ U(x, r)\subset V\}$$

este o topologie pe (X, d) *numită topologia asociată distanţei* d.

Demonstraţie. Într-adevăr $\Phi, X\in\tau_d$. Fie $x\in V_1\cap V_2$ $(V_1, V_2\in\tau_d)$. Atunci există sferele $U_1(x, r_1)$, $U_2(x, r_2)$ astfel încît $U_1\subset V_1$ şi $U_2\subset V_2$.

Scanned with OKEN Scanner

Considerînd $r = \min(r_1, r_2)$ sfera $U(x, r) \subset V_1 \cap V_2$ deci $V_1 \cap V_2 \in \tau_d$. Fie $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i (V_i \in \tau_d)$ și un punct arbitrar $x \in V$. Dacă $x \in V_p$ există $U(x, r_p) \subset V_p$, deci $U(x, r_p) \subset V$.

Cu aceasta propoziția este demonstrată.

Orice sferă $U(x_0, r)$ este o mulțime deschisă.

Într-adevăr, luînd $x_1 \in U(x_0, r)$, atunci pentru $r_1 < r - d(x_0, x_1)$ avem $U(x_1, r_1) \subset U(x_0, r)$, deoarece $\forall_{\substack{y \in U(x_1, r_1) \\ x \in U(x_0, r)}} d(x_0, y) \leqslant d(x_0, x_1) + d(x_1, y) < r - r_1 + r_1 = r$.

Mulțimea sferelor $U\left(x, \frac{1}{n}\right)$ $(n \in N)$ formează un sistem fundamental numărabil de vecinătăți ale punctului $x \in X$.

PROPOZIȚIA 2. *Orice spațiu metric (X, d) este separat.*

Demonstrație. $\forall_{x_1, x_2 \in X} x_1 \neq x_2$ considerăm sferele $U_1(x_1, r_1)$, $U_2(x_2, r_2)$ astfel încît $r_1 + r_2 < d(x_1, x_2)$. În acest fel avem $U_1 \cap U_2 = \Phi$, căci dacă ar $\exists_{x_0 \in X} x_0 \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow x_0 \in U_1$ și $x_0 \in U_2$, deci $d(x_1, x_2) < d(x_1, x_0) + d(x_0, x_2) < r_1 + r_2$ ceea ce contrazice ipoteza.

Se poate arăta că dacă (X, d) este un spațiu metric iar τ_d topologia asociată distanței d, atunci dacă $A \subset X$, topologia τ_A indusă de τ_d pe A coincide cu topologia asociată pe A distanței d_A. În baza definiției limitei unui șir într-un spațiu topologic, rezultă că în spațiile metrice convergența șirului (x_n) către x_0 se exprimă sub forma :

$$\lim_n d(x_n, x_0) = 0.$$

Deoarece topologia unui spațiu metric indusă de metrica sa este separată, deducem că într-un spațiu metric dacă un șir are o limită, aceasta este unică. Această proprietate este valabilă evident și în spațiile normate.

DEFINIȚIA 1. Fie (X, d) un spațiu metric cu topologia asociată distanței d și șirul $f : N \to (X, d)$, $f(n) = x_n$. Vom spune că șirul (x_n) este un șir fundamental (Cauchy) dacă și numai dacă :

$$\forall_{\varepsilon \in R^+} \exists_{n_0(\varepsilon) \in N} \forall_{m, n \in N} n_0 \leqslant n, m \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

PROPOZIȚIA 3. *Orice șir convergent într-un spațiu metric (X, d) cu topologia asociată distanței d este un șir fundamental.*

Într-adevăr, deoarece $d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru $n > n_0(\varepsilon)$ avem $d(x_n, x_m) < d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m) < \varepsilon$ pentru $n, m > n_0(\varepsilon)$.

DEFINIȚIA 2. Un spațiu metric (X, d) spunem că este complet dacă orice șir fundamental este convergent către un element din spațiul metric.

Un spațiu vectorial normat și complet se numește spațiu Banach. Ținînd seama de definiția 4 din I.2.2. dată spațiilor vectoriale normate echivalente putem enunța :

PROPOZIȚIA 4. *Fie $(E_1, \Gamma, \|\cdot\|_1)$, $(E_2, \Gamma, \|\cdot\|_2)$ două spații vectoriale normate echivalente $(E_1 \sim E_2)$. Dacă șirul $(x_n) \to x_0$ în spațiul vectorial normat E_1, atunci $(x_n) \to x_0$ și în spațiul vectorial normat E_2.*

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Într-adevăr dacă $(x_n) \to x$ în E_1 atunci $\lim_n \| x_n - x \|_1 = 0$ și deoarece conform definiției 4 din I.2.2 $\| x_n - x \|_2 \leqslant C_2 \| x_n - x \|_1$, obținem $\lim_n \| x_n - x \|_2 = 0$. Reciproc, dacă $\lim_n \| x_n - x \|_2 = 0$, atunci deoarece

$$C_1 \| x_n - x \|_1 \leqslant \| x_n - x \|_2 \text{ avem } \lim_n \| x_n - x \|_1 = 0,$$

adică $(x_n) \to x$ în E_1. Cu aceasta propoziția este demonstrată.

În baza acestei proprietăți în spațiile vectoriale normate echivalente avem aceeași structură de convergență deci aceeași topologie. Astfel este pe deplin justificată definiția 4 din I.2.2 dată spațiilor vectoriale normate echivalente.

Remarcăm că această proprietate se transpune și la spațiile metrice dacă echivalența acestora se definește printr-o relație analogă înlocuind norma $\| x \|$ prin $d(x, 0)$.

3. Axiomele spațiilor vectoriale topologice Spații local convexe

Fie (E, Γ) un spațiu vectorial și $\mathscr{B}$ o mulțime de părți ale lui E.

DEFINIȚIA 1. Spunem că spațiul vectorial (E, Γ) este un spațiu vectorial topologic dacă am definit mulțimea $\mathscr{B}$ de părți din E care satisfac următoarele condiții:

1) $\underset{V \in \mathscr{B}}{\forall} V$ este echilibrată și absorbantă în E

2) $\underset{V_1, V_2 \in \mathscr{B}}{\forall} \underset{V_3 \in \mathscr{B}}{\exists} V_3 \subset V_1 \cap V_2$

3) $\underset{V \in \mathscr{B}}{\forall} \underset{V' \in \mathscr{B}}{\exists} V' + V' \subset V.$

Deoarece orice element $V \in \mathscr{B}$ este o mulțime absorbantă rezultă că $O \in V$. Din acest motiv elementele mulțimii $\mathscr{B}$ se numesc vecinătăți ale originii O în E. Deci topologia spațiului vectorial s-a definit cu ajutorul vecinătăților originii.

Această definiție a spațiului vectorial topologic este echivalentă cu următoarea:

Numim spațiu vectorial topologic o mulțime X de elemente care verifică următoarele proprietăți:

a) este un spațiu vectorial pe corpul Γ;

b) este un spațiu topologic;

c) operațiile de adunare și înmulțire cu scalari din Γ sînt continue în raport cu topologia spațiului X, adică sînt continue aplicațiile: $X \times X \to X ((x, y) \to x + y)$ și $X \times \Gamma \to X$ $((x, \lambda) \to \lambda x)$.

În acest caz spunem că topologia este compatibilă cu structura de spațiu vectorial a lui X.

O parte V_1 a lui E spunem că este o vecinătate a originii $O \in E$ dacă $\underset{V \in \mathscr{B}}{\exists} V \subset V_1$. De aici rezultă că V_1 este o mulțime absorbantă. Se verifică imediat că într-un spațiu vectorial topologic, dacă V' este o vecinătate

Scanned with OKEN Scanner

a originii atunci $\underset{\lambda\in\Gamma}{\forall}\ \lambda\neq 0$, $\lambda V'$ este o vecinătate a originii. Cu aceasta rezultă că sistemul $\mathscr{B}$ de vecinătăţi ale originii cu care am definit topologia pe spaţiul vectorial (E, Γ) este un sistem fundamental de vecintăţi ale originii.

Într-adevăr, fie V' o vecinătate a originii deci $\underset{V\in\mathscr{B}}{\exists}\ V\subset V'$. Atunci $\lambda V\in\mathscr{B}$ şi din axioma 2° a spaţiilor vectorial topologice rezultă că $\underset{W\in\mathscr{B}}{\exists}\ W\subset\lambda V$. Deci $W\subset\lambda V\subset\lambda V'$ şi $\lambda V'$ este o vecinătate a originii.

Remarcăm că într-un spaţiu vectorial topologic întotdeauna putem alege un sistem fundamental de vecinătăţi deschise ale originii.

În acest scop este suficient să luăm mulţimea de părţi din E care sînt vecinătăţi deschise ale originii şi conţinute în fiecare $V\in\mathscr{B}$. Două sisteme fundamentale de vecinătaţi $\mathscr{B}_1$ şi $\mathscr{B}_2$ definesc aceeaşi topologie pe un spaţiu vectorial (E, Γ) dacă

$$\underset{V_1\in\mathscr{B}_1}{\forall}\ \underset{V_2\in\mathscr{B}_2}{\exists}\ V_2\subset V_1 \text{ şi } \underset{V_2\in\mathscr{B}_2}{\forall}\ \underset{V_1\in\mathscr{B}_1}{\exists}\ V_1\subset V_2.$$

Definiţia 2. Spunem că un spaţiu vectorial topologic (E, Γ, τ) este local convex dacă orice vecinătate a originii conţine o vecinătate convexă a originii.

Deci dacă un spaţiu vectorial topologic posedă un sistem fundamental de vecinătăţi convexe a originii, atunci spaţiul vectorial topologic este local convex.

Astfel, de exemplu, spaţiul vectorial R^n în care topologia a fost definită cu ajutorul sferelor $U(0, r) = \{x\in R^n, d(0, x)<r\}$ este un spaţiu vectorial topologic local convex. Dacă $x\in R^n$ şi V este o vecinătate a originii atunci $x+V$ reprezintă o vecinătate a punctului x. Definiţia 4 din I.3.1 dată şirului convergent într-un spaţiu topologic oarecare (X, τ) se păstrează evident şi în spaţiile vectoriale topologice, dar putem acum introduce şi noţiunea de şir fundamental.

Definiţia 3. Fie (E, Γ, τ) un spaţiu vectorial topologic, $\mathscr{B}$ sistemul fundamental de vecinătăţi a originii şi şirul $f: N\to E$, $f(n)=x_n$. Vom spune că şirul (x_n) este un şir fundamental dacă şi numai dacă

$$\underset{V\in\mathscr{B}}{\forall}\ \underset{\eta(V)\in R^+}{\exists}\ \underset{p,q\in N}{\forall}\ \eta(V)\leqslant p,\ q\Rightarrow x_p - x_q\in V.$$

Dacă orice şir fundamental este convergent în (E, Γ, τ), atunci spunem că spaţiul vectorial topologic este complet.

Definiţia 4. Spunem că fincţionala liniară

$$T: E\to\Gamma$$

definită pe spaţiul vectorial topologic (E, Γ, τ) este continuă în punctul $x_0\in E$, dacă oricare ar fi vecinătatea U a numărului $(T, x_0)\in\Gamma$, există o vecinătate V a lui $x_0\in E$ astfel încît $T(V\cap E)\subset U$.

Funcţionala liniară T este continuă pe E dacă este continuă în fiecare punct al lui E.

În continuare vom arăta modul de construcţie a topologiilor spaţiilor local convexe cu ajutorul unei familii filtrante de seminorme.

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 5. Fie (E, Γ) un spațiu vectorial și $\mathscr{F}$ o familie $(p_i)_{i\in I}$ de seminorme pe (E, Γ). Vom spune că familia $\mathscr{F}$ de seminorme este filtrantă dacă și numai dacă

$$\underset{p_1, p_2\in\mathscr{F}}{\forall}\ \underset{\substack{p\in\mathscr{F}\\ \alpha_1,\alpha_2\in R^+}}{\exists}\ \underset{x\in E}{\forall}\ p(x)\geqslant\alpha_1 p_1(x),\ p(x)\geqslant\alpha_2 p_2(x).$$

În baza definiției 5 și propoziției 2 din I.2.2 familia de bule deschise $U_{i,\varepsilon}(p_i, \varepsilon)\,(i\in I)$ asociată familiei filtrante de seminorme $\mathscr{F}$ este o mulțime convexă, echilibrată și absorbantă. Vom nota cu $\mathscr{B}$ această familie de bule $(U_{i,\varepsilon})\,(i\in I)$.

PROPOZIȚIA 1. *Fie $\mathscr{F}=(p_i)_{i\in I}$ o familie filtrantă de seminorme pe spațiul vectorial (E, Γ). Atunci familia $\mathscr{B}$ de bule $(U_{i,\varepsilon}(p_i, \varepsilon))_{i\in I}$ asociată familiei $\mathscr{F}$ formează un sistem fundamental de vecinătăți deschise și convexe a originii spațiului vectorial (E, Γ).*

Demonstrație. Prima axiomă a spațiilor vectoriale topologice este verificată deoarece bulele $U_{i,\varepsilon}$ sînt echilibrate și absorbante. A doua axiomă va fi verificată dacă vom arăta că

$$\underset{U_{i,\varepsilon_1}, U_{J,\varepsilon_2}\in\mathscr{B}}{\forall}\ \underset{U_{k,\varepsilon}\in\mathscr{B}}{\exists}\ U_{k,\varepsilon}\subset U_{i,\varepsilon_1}\cap U_{J,\varepsilon_2}.$$

Într-adevăr, familia de seminorme fiind filtrantă

$$\underset{\substack{p_k\in\mathscr{F}\\ \alpha_1,\alpha_2\in R^+}}{\exists}\ \underset{p_i, p_J\in\mathscr{F}}{\forall}\ \underset{x\in E}{\forall}\ p_k(x)\geqslant\alpha_1 p_i(x),\ p_k(x)\geqslant\alpha_2 p_J(x).$$

Fie $x\in U_{k,\varepsilon}$ atunci $p_k(x)<\varepsilon\Rightarrow p_i(x)<\dfrac{\varepsilon}{\alpha_1}$,

$$p_J(x)<\frac{\varepsilon}{\alpha_2}.$$

Dacă luăm $\varepsilon<\min(\alpha_1\varepsilon_1, \alpha_2\varepsilon_2)$ atunci $\dfrac{\varepsilon}{\alpha_1}<\varepsilon_1$ și $\dfrac{\varepsilon}{\alpha_2}<\varepsilon_2$, deci $x\in U_{k,\varepsilon}\Rightarrow$ $\Rightarrow x\in U_{i,\varepsilon_1}\cap U_{J,\varepsilon_2}$. Cu aceasta axioma a doua este verificată.

Fie $U_{k,\varepsilon}\in\mathscr{B}$. Considerăm $U_{k,\varepsilon_1}\in\mathscr{B}$ cu $2\varepsilon_1<\varepsilon$. În aceste condițiuni $\underset{x,y\in U_{k,\varepsilon_1}}{\forall}\Rightarrow p_k(x)<\varepsilon_1, p_k(y)<\varepsilon_1$ și pe baza proprietății de subaditivitate a seminormei avem

$$p_k(x+y)\leqslant p_k(x)+p_k(y)<2\varepsilon_1<\varepsilon$$

adică $x+y\in U_{k,\varepsilon}$. În consecință $U_{k,\varepsilon_1}+U_{k,\varepsilon_2}\subset U_{k,\varepsilon}$. Cu aceasta propoziția este complet demonstrată.

În acest fel cu ajutorul bulelor $(U_{i,\varepsilon})\,(i\in I)$ asociate familiei filtrante $(p_i)\ i\in I$ de seminorme am construit un sistem fundamental de vecinătăți ale originii spațiului vectorial (E, Γ) și deoarece bulele $U_{i,\varepsilon}$ sînt mulțimi convexe, topologia astfel definită este local convexă.

PROPOZIȚIA 2. *Fie (E, Γ, τ) un spațiu vectorial topologic și $A\subset E$ o vecinătate convexă și echilibrată a originii.*

Scanned with OKEN Scanner

Atunci Fr. A[1] *respectiv* Int. A[2] *reprezintă punctele* $x \in E$ *pentru care* $p_A(x) = 1$ *respectiv* $p_A(x) < 1$.

Demonstrație. Fie $x \in E$ pentru care $p_A(x) = 1$. Atunci există $\lambda \in \Gamma$, astfel încît $x \in \lambda A$ pentru $|\lambda| > 1$ și $x \notin \lambda A$ pentru $|\lambda| < 1$. Notînd $\frac{1}{|\lambda|} = \rho$ avem $x\rho \in A$ dacă $\rho < 1$ și $x\rho \notin A$ dacă $\rho > 1$. În consecință de aici rezultă că $x = 1.x$ $(\rho = 1)$ este un punct frontieră pentru A, adică $x \in$ Fr. A.

Fie acum $x \in E$ pentru care $p_A(x) < 1$. Atunci există $\lambda \in \Gamma$, $|\lambda| < 1$ încît $x \in \lambda A$. Cum A este echilibrată avem $\lambda A = |\lambda| A$ și deci $x \in |\lambda| A$, adică $\frac{x}{|\lambda|} \in A$. Deoarece $0 \in$ Int. A și $\frac{x}{|\lambda|} \in A \subset \bar{A}$[3] rezultă că toate punctele $0(1-\alpha) + \frac{x}{|\lambda|}\alpha \in$ Int. A pentru $\alpha \in (0, 1)$. În particular luînd $\alpha = |\lambda| < 1$ obținem $x \in$ Int.A. Cu aceasta propoziția este demonstrată.

COROLAR. *Fie* (E, Γ, τ) *un spațiu vectorial topologic și* $A \subset E$ *o vecinătate deschisă (închisă) convexă și echilibrată a originii.*

Atunci $p_A(x) < 1$.

Într-adevăr, conform propoziției precedente, deoarece $A =$ Int.A, $\forall_{x \in A} p_A(x) < 1$. Dacă $\bar{A} = A =$ Int.$A \cup$ Fr. A, A este închisă.

Atunci $\forall_{x \in A} p_A(x) \leqslant 1$, deoarece dacă $x \in$ Int.A, $p_A(x) < 1$ și dacă $x \in$ Fr. A, $p_A(x) = 1$.

Există o reciprocă a propoziției 1 și anume că orice spațiu local convex se poate defini cu ajutorul unei familii filtrante de seminorme.

PROPOZIȚIA 3. *Pe orice spațiu local convex există o familie filtrantă de seminorme care generează topologia spațiului.*

Demostrație. Fie (X, Γ, τ) spațiul vectorial topologic local convex și $\mathscr{B}$ sistemul fundamental de vecinătăți deschise ale originii. Deoarece sistemul $\mathscr{B}$ este echilibrat, absorbant și convex conform corolarului de mai înainte și propoziției 3 din I.2.3, $\forall_{A \in \mathscr{B}} \forall_{x \in A}$, $p_A(x)$ este o seminormă și $p_A(x) < 1$. Fie familia de seminorme $\mathscr{F} = \{p_A(x), A \in \mathscr{B}\}$ corespunzătoare tuturor vecinătăților originii. Să arătăm că $\mathscr{F}$ este filtrantă. Atunci $\forall_{A_1 A_2 \in \mathscr{B}}$ considerăm $A_3 = A_1 \cap A_2$ deci

$$p_{A_3}(x) = \inf_{x \in \lambda A_3} |\lambda| \Rightarrow p_{A_3}(x) > p_{A_1}(x) \text{ și } p_{A_3}(x) > p_{A_2}(x)$$

deoarece $A_3 \subset A_1$, $A_3 \subset A_2$. Conform definiției 5 din I.3.3 $\mathscr{F}$ este o familie filtrantă de seminorme.

Considerăm acum familia de bule $U_A(p_A(x), \varepsilon_A)$ corespunzătoare familiei filtrante $\mathscr{F}$ de seminorme.

---

[1] Fr.A reprezintă mulțimea punctelor frontieră mulțimii A. Dacă $x_0 \in$ Fr.A atunci orice vecinătate a lui x_0 conține puncte din A și din CA.

[2] Int.A reprezintă mulțimea punctelor interioare mulțimii A.

[3] $\bar{A} = A \cup A'$ reprezintă închiderea mulțimii A, adică reuniunea dintre mulțimea A și mulțimea punctelor sale de acumulare.

Scanned with OKEN Scanner

Mulțimea U_A definește topologia $\tau_{\mathscr{F}}$ pe spațiul local convex (X, Γ, τ). Pentru a arăta că topologia τ a spațiului X coincide cu $\tau_{\mathscr{F}}$ observăm că $\forall_{A \in \mathscr{B}} P_A(x) < 1$, deci A este o vecinătate a originii pentru topologia $\tau_{\mathscr{F}}$. În consecință, topologia τ definită de sistemul fundamental de vecinătăți a originii $\mathscr{B}$ este mai puțin fină decît topologia definită de $\mathscr{F}$.

Fie $U_A(p_A(x), \varepsilon_A)(A \in \mathscr{B})$ o vecinătate a originii în topologia $\tau_{\mathscr{F}}$. Atunci $p_A(x) < \varepsilon_A$ înseamnă totalitatea punctelor x pentru care $p_A(x) < \varepsilon_A$, adică punctele $x \in \varepsilon_A A$. Deci $\varepsilon_A A$ reprezintă o vecinătate a originii pentru topoloiga τ. În consecință topologia $\tau = \tau_{\mathscr{F}}$ și cu aceasta propoziția este demonstrată.

Remarcăm că o familie numărabilă de seminorme pe un spațiu vectorial se poate înlocui întotdeauna cu un șir crescător de seminorme care constituie o familie filtrantă numărabilă de seminorme.

Pentru nevoile teoriei distribuțiilor vom considera cîteva spații vectoriale topologice local convexe și separate care sînt suficiente abordării unor probleme privind produsul de convoluție în spațiul distribuțiilor. Aceste spații vectoriale topologice local convexe au drept elemente funcții cu anumite proprietăți.

§ 4. Spații de funcții

1. Clase de funcții, generalități și notații
Spațiul L^p

Fie $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ un punct oarecare din spațiul euclidian real n dimensional și $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in R^n$ un punct avînd coordonatele $\alpha_i \in N_0 (i = 1, 2, \ldots, n)$. Atunci $\alpha \in N_0^n$.

Derivata parțială

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_1^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} f$$

a funcției $f : R^n \to \Gamma$ se va nota $D_x^\alpha f$ iar ordinul de derivare prin $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Dacă $|\alpha| = 0$ atunci $\alpha_i = 0 (i=1, 2, \ldots, n)$, deci $D_x^0 f = f$. Fie $\alpha, \beta, \in N_0^n$. Dacă funcția $f : R^n \to \Gamma$ admite derivate parțiale continue pînă la ordinul $|\alpha + \beta|$ inclusiv, atunci avem :

$$D_x^{\alpha+\beta} f = D_x^\alpha (D_x^\beta f) = D_x^\beta (D_x^\alpha f).$$

Definiția 1. Numim suport al funcției $f : R^n \to \Gamma$ și vom nota $\operatorname{supp} f$ mulțimea :

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in R^n, f(x) \neq 0\}}.$$

Astfel dacă $x_0 \in \operatorname{supp} f$ atunci în orice sferă $U(x_0, r)$ din R^n există un punct x astfel încît $f(x) \neq 0$. În particular dacă $\operatorname{supp} f$ este mărginit atunci deoarece $\operatorname{supp} f$ este o mulțime închisă rezultă că $\operatorname{supp} f$ este compact.

Scanned with OKEN Scanner

PROPOZIȚIA 1. *Dacă* $f, g : R^n \to \Gamma$ *atunci* :

$$\operatorname{supp}(f+g) \subset \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g \tag{1}$$

$$\operatorname{supp}(f \cdot g) \subset \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g. \tag{2}$$

Demonstrație. Fie $x_0 \in \operatorname{supp}(f+g)$. Atunci $\underset{U(x_0,r)\subset R^n}{\forall} \underset{x\in U(x_0,r)}{\exists} (f+g)(x) \neq 0$. Această din urmă relație implică $f(x) \neq 0$ sau $g(x) \neq 0$. În consecință $x_0 \in \operatorname{supp} f$ sau $x_0 \in \operatorname{supp} g$. Deci $x_0 \in \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g$.

În ce privește relația (2) observăm că $x_0 \in \operatorname{supp}(f\cdot g) \Rightarrow (fg)(x) \neq 0$, $x \in U(x_0, r)$; deci $f(x) \neq 0$ și $g(x) \neq 0$. În consecință $x_0 \in \operatorname{supp} f$ și $x_0 \in \operatorname{supp} g$. Deci $x_0 \in \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g$. Cu aceasta propoziția este demonstrată.

O funcție complexă definită pe $\Omega \subset R^n$ spunem că este de clasa $C^m(\Omega)$ dacă este continuă pe Ω împreună cu derivatele parțiale pînă la ordinul m inclusiv. $C^0(\Omega)$ și $C^\infty(\Omega)$ vor reprezenta respectiv clasa funcțiilor continue și clasa funcțiilor indefinit derivabile pe $\Omega \subset R^n$. Spunem că mulțimea $A \subset R^n$ este o mulțime neglijabilă sau de măsură Lebesgue nulă dacă $\underset{\varepsilon\in R^+}{\forall} \underset{U_i\subset R^n}{\exists} \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supset A$ și suma volumelor sferelor deschise $U_i (i = 1, 2, \ldots)$ este mai mică decît ε. Spunem că funcția $f : A \to \Gamma (A \subset R^n)$ este nulă a. p. t. (aproape peste tot) pe mulțimea A, dacă mulțimea $\{x \in A,\ f(x) \neq 0\}$ este de măsură Lebesgue nulă. În acest fel funcțiile f și g definite pe $A \in R^n$ sînt egale a. p. t. și vom scrie $f = g$ a. p. t. $x \in A$ dacă mulțimea $\{x \in A,\ f(x) \neq g(x)\}$ este de măsură Lebesgue nulă.

DEFINIȚIA 2. Funcția $f : \Omega \to \Gamma(\Omega \subset R^n)$ este măsurabilă dacă ea este a. p. t. limita unui șir de funcții continue, deci $\underset{f_k\in C^0(\Omega)}{\exists} f(x) = \lim_k f_k(x)$ a. p. t. În particular orice funcție continuă a. p. t. este măsurabilă. Dacă f și g sînt măsurabile atunci $f + g$, fg sînt măsurabile, $\frac{f}{g}$ de asemenea este măsurabilă dacă $g \neq 0$ peste tot. O mulțime $\Omega \subset R^n$ este măsurabilă dacă funcția ei caracteristică

$$\chi_\Omega = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x \in \Omega \\ 0 \text{ pentru } x \notin \Omega \end{cases}$$

este măsurabilă.

DEFINIȚIA 3. Funcția măsurabilă și nenegativă $f : \Omega \to R (\Omega \subset R^n)$, spunem că este integrabilă (sumabilă) Lebesgue pe Ω, dacă este a. p. t. limita unui șir f_k de funcții continue nedescrescătoare cu suport mărginit, cu proprietatea

$$\int_\Omega f_k(x)\mathrm{d}x \leqslant M.$$

Atunci $\lim_k \int_\Omega f_k(x)\mathrm{d}x$ se numește integrala Lebesgue a funcției f pe $\Omega \subset R^n$ și se notează $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$. Deci $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_k \int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie funcţia măsurabilă $f:\Omega \to R(\Omega \subset R^n)$. Atunci funcţiile: $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$, $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$ numite respectiv partea pozitivă şi negativă a funcţiei f, sînt de asemenea măsurabile şi evident nenegative ($f^+, f^- \geqslant 0$). Au loc egalităţile: $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$.

În general, spunem că funcţia $f:\Omega \to R(\Omega \subset R^n)$ este integrabilă Lebesgue pe Ω dacă funcţiile f^+ şi f^- sînt integrabile Lebesgue. Integrala Lebesgue a funcţiei f va avea astfel expresia:

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \int_\Omega f^+(x)\,dx - \int_\Omega f^-(x)\,dx.$$

Fie acum funcţia complexă şi măsurabilă $f:\Omega \to \Gamma(\Omega \subset R^n)$.

Vom spune că funcţia f este integrabilă Lebesgue pe Ω dacă funcţiile reale $\mathrm{Re}f$ şi $\mathrm{Im}f$ sînt integrabile Lebesgue. În acest caz avem:

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \int_\Omega \mathrm{Re}\,f(x)\,dx + i\int_\Omega \mathrm{Im}\,f(x)\,dx.$$

Spunem că funcţia $f: R^n \to \Gamma$ este absolut integrabilă pe R^n dacă $\int_{R^n} |f(x)|\,dx < \infty$, integrala fiind considerată în sensul lui Lebesgue.

În acest caz, evident, există şi $\int_{R^n} f(x)\,dx$.

Dacă funcţia f este absolut integrabilă pe orice domeniu mărginit $A \subset R^n$, vom spune că f este o funcţie local integrabilă.

Dacă f şi g sînt absolut integrabile pe R^n şi $f = g$ a. p. t. pe R^n, atunci

$$\int_{R^n} f(x)\,dx = \int_{R^n} g(x)\,dx.$$

Mulţimea funcţiilor integrabile în sensul lui Lebesgue pe R^n sau pe o mulţime compactă $\Omega \subset R^n$ se va nota $L^1(R^n)$, $L^1(\Omega)$ şi se va numi spaţiul funcţiilor integrabile, respectiv local integrabile.

În legătură cu schimbarea ordinii de integrare în cazul integralei Lebesgue are loc:

TEOREMA 1. *Fie $f(x, y)$ o funcţie integrabilă pe R^{n+m}, $x \in R^n$, $y \in R^m$, atunci:*

(1) *$f(x, y)$ ca funcţie de y este integrabilă pe R^m aproape pentru toţi $x \in R^n$;*

(2) *$f(x, y)$ ca funcţie de x este integrabilă pe R^n, aproape pentru toţi $y \in R^m$;*

3) *$\int_{R^n} f(x, y)\,dx$ şi $\int_{R^m} f(x, y)\,dy$ sînt funcţii integrabile de y pe R^m şi respectiv de x pe R^n şi*

$$\int_{R^{n+m}} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{R^n} dx \int_{R^m} f(x, y)\,dy = \int_{R^m} dy \int_{R^n} f(x, y)\,dx.$$

Scanned with OKEN Scanner

Spaţiul L^p. Fie $p \geq 1$ un număr real şi f o funcţie complexă măsurabilă pe $\Omega \subset R^n$. Funcţia f este p integrabilă pe Ω dacă $|f|^p$ este integrabilă Lebesgue pe Ω, deci dacă $|f|^p \in L^1(\Omega)$. Mulţimea funcţiilor p integrabile pe $\Omega \subset R^n$ se va nota $\mathscr{L}^p(\Omega)$. În mulţimea funcţiilor p integrabile $\mathscr{L}^p(\Omega)$, vom introduce relaţia de echivalenţă : $f \sim g$ dacă $f(x) = g(x)$, a.p.t. Mulţimea tuturor claselor de echivalenţă se va nota $L^p(\Omega)$ şi se va numi spaţiul $L^p(\Omega)$.

Spaţiul $L^p(\Omega)$ este spaţiul cît a lui $\mathscr{L}^p(\Omega)$ în raport cu relaţia de echivalenţă introdusă mai sus. În consecinţă dacă notăm cu ρ relaţia de echivalenţă introdusă în $\mathscr{L}^p(\Omega)$, atunci $L^p(\Omega) = \mathscr{L}^p(\Omega)/\rho$.

Spaţiul $L^p(\Omega)$ este un spaţiu vectorial pe corpul Γ în raport cu operaţiile obişnuite cu funcţii din $L^p(\Omega)$, anume :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x); \qquad (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Într-adevăr, dacă $f, g \in L^p(\Omega)$ atunci din inegalitatea $|f(x) + g(x)|^p \leqslant 2^p \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\}$ rezultă $f + g \in L^p(\Omega)$ şi din $|\alpha f|^p = |\alpha|^p |f|^p$ rezultă $\alpha f \in L^p(\Omega)$, $\alpha \in \Gamma$.

Spaţiile $L^p(\Omega)$, $L^q(\Omega)$ pentru care avem $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se numesc conjugate. Relativ la spaţiile conjugate $L^p(\Omega)$, $L^q(\Omega)$ are loc inegalitatea lui Hölder :

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_\Omega |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3}$$

În particular, dacă $p = 2$ atunci $q = 2$, deci $L^2(\Omega)$ este autoconjugat şi avem :

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \left(\int_\Omega |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_\Omega |g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

numită inegalitatea lui Schwarz.

În spaţiul $L^p(\Omega)$ norma se defineşte prin relaţia :

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|\,dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5}$$

Din $\|f(x)\|_p = 0$ avem $f(x) = 0$, a. p. t. deci prima condiţie a normei este satisfăcută.

De asemenea dacă $f \in L^p(\Omega)$ atunci $\underset{\alpha \in \Gamma}{\forall} \alpha f \in L^p(\Omega)$, deci $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p$.

În baza inegalităţii lui Minkowski :

$$\left(\int_\Omega |f(x) + g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{6}$$

rezultă $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.

Scanned with OKEN Scanner

Remarcăm că semnul egal are loc numai dacă există o constantă $C \geqslant 0$ astfel încît $Cf(x)=g(x)$, a. p. t. În acest fel spaţiul $L^p(\Omega)$ este un spaţiu normat.

Pe spaţiul $\mathscr{L}^p(\Omega)$ care este un spaţiu vectorial ca şi $L^p(\Omega)$ funcţionala (5) este o seminormă. Din acest motiv spaţiul $\mathscr{L}^p(\Omega)$ este un spaţiu seminormat şi nu normat ca $L^p(\Omega)$. Evident, liniaritatea spaţiului $\mathscr{L}^p(\Omega)$ se demonstrează identic ca şi pentru $L^p(\Omega)$ pe baza inegalităţilor lui Hölder şi Minkowski.

Cu ajutorul seminormei (5) spaţiul $\mathscr{L}^p(\Omega)$ poate fi înzestrat cu o topologie local convexă. De remarcat că acest spaţiu local convex nu este separat. Topologia astfel definită pe $\mathscr{L}^p(\Omega)$ se numeşte topologia convergenţei în medie de ordinul p. Sistemul fundamental $\mathscr{B}$ de vecinătăţi ale originii spaţiului $\mathscr{L}^p(\Omega)$ este constituit din mulţimea numărabilă de bule

$$U_n = \left\{ f \in \mathscr{L}^p(\Omega),\ \|f\|_p \leqslant \frac{1}{n} \right\},\ n \in N.$$

Elementul nul din $\mathscr{L}^p(\Omega)$ este $f = 0$, $\forall\ x \in \Omega$. Convergenţa în normă $f_k \to f$ în $L^p(\Omega)$ este dată de relaţia :

$$\|f_k(x) - f(x)\|_p \to 0 \text{ adică } \lim_k \int_\Omega |f_k(x) - f(x)|^p \, dx = 0.$$

Se poate arăta că spaţiul $L^p(\Omega)$ este un spaţiu complet, deci un spaţiu Banach.

Spaţiul $C(\Omega)$ al funcţiilor continue şi cu suport compact este dens în $L^p(\Omega)$. Dacă în $L^p(\Omega)$ considerăm $p = \infty$ obţinem spaţiul $L^\infty(\Omega)$. Spaţiul $L^\infty(\Omega)$ este constituit din funcţiile complexe măsurabile pe $\Omega \subset R^n$ şi esenţial mărginite. O funcţie măsurabilă f este esenţial mărginită dacă există constanta $C \geqslant 0$ astfel încît $|f(x)| \leqslant C$, a. p. t. Marginea inferioară a numerelor $C \geqslant 0$ se numeşte marginea superioară esenţială a funcţiei $|f(x)|$ pe Ω şi se notează : $\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf \{C \geqslant 0, |f(x)| \leqslant C, x \in \Omega \subset R^n\}$.

Spaţiul $L^\infty(\Omega)$ devine un spaţiu normat dacă definim norma prin relaţia :

$$\|f(x)\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Se poate arăta că dacă Ω este o mulţime mărginită şi măsurabilă iar $f \in L^p(\Omega)$, atunci $\|f\|_{L^\infty} = \lim_p \|f\|_{L^p}$.

PROPOZIŢIA 2. $\forall_{f \in L^1(\Omega)} |f| \leqslant M \Rightarrow f \in L^p(\Omega)$.

Într-adevăr, din inegalitatea

$$\int_\Omega |f|^p \, dx = \int_\Omega |f|^{p-1} |f| \, dx \leqslant M^{p-1} \int_\Omega |f| \, dx$$

rezultă $f \in L^p(\Omega)$. Remarcăm că în baza inegalităţii lui Hölder, dacă $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ atunci $fg \in L^1(\Omega)$.

Scanned with OKEN Scanner

Spaţiul L^2

În particular, dacă $f, g \in L^2(\Omega)$ atunci în baza inegalităţii lui Schwarz rezultă $fg \in L^1(\Omega)$.

PROPOZIŢIA 3. $\forall_{f \in L^2(\Omega)}$ *şi* Ω *mărginit, atunci* $f \in L^1(\Omega)$.

Într-adevăr, din inegalitatea $|f| \leqslant \frac{1}{2}(1 + f^2)$ rezultă propoziţia 3.

În spaţiul $L^2(\Omega)$ se poate defini produsul scalar prin relaţia:

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)\, \bar{g}(x)\, dx \tag{6}$$

unde $\bar{g}(x)$ este conjugatul lui $g(x)$ şi astfel $\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)}$. Deoarece spaţiul $L^2(\Omega)$ este un spaţiu Banach şi norma se poate deduce din produsul scalar (6), rezultă că spaţiul $L^2(\Omega)$ este un spaţiu Hilbert.

Observăm că $\forall_{f, g \in L^2(\Omega)}$ avem $(f, g) = \overline{(g, f)}$, iar din inegalitatea lui Schwarz deducem

$$|(f, g)| \leqslant \|f\|_2 \cdot \|g\|_2. \tag{7}$$

Convergenţa în spaţiul $L^2(\Omega)$ se mai numeşte convergenţă în medie pătratică.

2. Spaţii fundamentale

Spaţiul $K(\Omega)$

DEFINIŢIA 1. Fie $\Omega \subset R^n$ o mulţime compactă fixă şi funcţiile complexe $\varphi : R^n \to \Gamma$. Mulţimea de funcţii:

$$K(\Omega) = \{\varphi;\ \varphi \in C^\infty(R^n),\ \operatorname{supp} \varphi \subset \Omega\}$$

se numeşte spaţiul de funcţii $K(\Omega)$.

Spaţiul $K(\Omega)$ este un spaţiu vectorial pe corpul Γ în raport cu operaţiile obişnuite de adunare şi înmulţire cu scalari pentru funcţii. Elementul nul al acestui spaţiu este funcţia identic nulă şi se va nota cu 0 ($\forall_{x \in R^n} \varphi(x) = 0$).

Fie $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in N_0^n$. Atunci aplicaţia

$$P_\alpha : K(\Omega) \to R$$

definită prin relaţia

$$P_\alpha(\varphi) = \sup_{x \in \Omega} |D_x^\alpha \varphi(x)|$$

este o normă pe spaţiul $K(\Omega)$. Pentru $|\alpha| \leqslant m (m \in N)$ conform relaţiei (4) din I.2.2 aplicaţia $p_m : K(\Omega) \to R$ definită prin

$$p_m(\varphi) = \sup_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} P_\alpha(\varphi) \tag{1}$$

Scanned with OKEN Scanner

este tot o normă pe spaţiul $K(\Omega)$. Considerînd $m=0, 1, 2, \ldots$ obţinem familia p_m numărabilă şi filtrantă de seminorme pe $K(\Omega)$. Cu ajutorul familiei filtrante şi numărabile de seminorme p_m putem defini pe $K(\Omega)$ o topologie local convexă. În acest fel spaţiul vectorial $K(\Omega)$ devine un spaţiu topologic local convex.

Astfel conform propoziţiei 1 din I.3.3 sistemul fundamental $\mathscr{B}$ de vecinătăţi convexe ale originii spaţiului $K(\Omega)$ este constituit din bulele $U_{m,\varepsilon} = \{\varphi;\ \varphi \in K(\Omega),\ p_m(\varphi) < \varepsilon\}$. Topologia definită pe $K(\Omega)$ cu sistemul fundamental $\mathscr{B}$ de vecinătăţi ale originii este o topologie local convexă.

PROPOZIŢIA 1. *Spaţiul local convex $K(\Omega)$ este un spaţiu Hausdorff.*

Demonstraţie. Fie $\varphi_1, \varphi_2 \in K(\Omega)$ şi $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Atunci evident $\sup\limits_{x\in\Omega} |\varphi_1 - \varphi_2| = a > 0$. Fie $\varepsilon < \frac{a}{2}$ şi vecinătăţile $V_1 = \varphi_1 + U_{m,\varepsilon}$, $V_2 = \varphi_2 + U_{m,\varepsilon}$ ale punctelor φ_1 şi φ_2. Dacă $V_1 \cap V_2 = \Phi$, spaţiul $K(\Omega)$ este separat. Să presupunem că $V_1 \cap V_2 \neq \Phi$. Atunci există $\varphi \in V_1 \cap V_2$, deci $\sup\limits_{x\in\Omega} |\varphi_1 - \varphi| < \varepsilon$, $\sup\limits_{x\in\Omega} |\varphi_2 - \varphi| < \varepsilon$, de unde $a = \sup\limits_{x\in\Omega} |(\varphi_1 - \varphi) + (\varphi - \varphi_2)| < 2\varepsilon$ ceea ce contrazice ipoteza.

În consecinţă deoarece spaţiul $K(\Omega)$ este separat, un şir dacă are o limită, aceasta este unică.

DEFINIŢIA 2. Spunem că şirul $(\varphi_i) \in K(\Omega)$ converge către $\varphi \in K(\Omega)$ dacă şi numai dacă $\forall\, m \geqslant 0 (m \in N_0)$, $\lim\limits_i p_m(\varphi_i - \varphi) = 0$ pe orice compact $\Omega_1 \subset \Omega$.

Aceasta înseamnă că oricare ar fi α, $D_x^\alpha \varphi_i$ converge uniform către

$$D_x^\alpha \varphi (D_x^\alpha \varphi_i \overset{u}{\Rightarrow} D_x^\alpha \varphi) \text{ în } \Omega.$$

Structura de convergenţă astfel definită pe $K(\Omega)$ este echivalentă cu convergenţa în sensul topologiei pe $K(\Omega)$ corespunzătoare definiţiei 4 din I.3.1. Se poate arăta că spaţiul local convex $K(\Omega)$ este un spaţiu complet în raport cu structura de convergenţă introdusă.

Dacă $\Omega = \{x;\ x \in R^n,\ \|x\| \leqslant 2a\}$ atunci

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2 - x^2}}, & \|x\| < a \\ 0, & \|x\| \geqslant a \end{cases} \qquad a > 0 \tag{2}$$

este un element din $K(\Omega)$ deoarece $\varphi \in C^\infty(R^n)$ şi $\operatorname{supp}\varphi = \{x,\ x \in R^n, \|x\| \leqslant a\} \subset \Omega$. Adică supp φ este sfera închisă cu centrul în origine şi de rază a, în timp ce Ω reprezintă sfera închisă cu centrul în origine şi de rază $2a$. Evident, Ω ca şi supp φ sînt mulţimi compacte din R^n.

Spaţiile $K^m(\Omega)$, $C(\Omega)$

DEFINIŢIA 3. Fie $\Omega \subset R^n$ o mulţime compactă fixă şi funcţiile complexe $\varphi : R^n \to \Gamma$. Mulţimea de funcţii :

$$K^m(\Omega) = \{\varphi;\ \varphi \in C^m(R^n),\ \operatorname{supp}\varphi \subset \Omega\}$$

se numeşte spaţiul de funcţii $K^m(\Omega)$.

Scanned with OKEN Scanner

Acest spaţiu este strîns legat de spaţiul $K(\Omega)$ din care cauză definiţia vecinătăţii unui punct şi a convergenţei se obţine din $K(\Omega)$ prin limitarea ordinului de derivare pînă la cel mult m. De aceea norma p_m definită pe spaţiul $K(\Omega)$ va fi normă şi pe spaţiul $K^m(\Omega)$. În consecinţă spaţiul $K^m(\Omega)$ este un spaţiu normat cu norma dată de expresia:

$$\| \varphi \| = p_m(\varphi) = \sup_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in \Omega} | D_x^\alpha \varphi |. \tag{3}$$

Cu ajutorul acestei norme pe $K^m(\Omega)$ se defineşte o topologie local convexă separată şi completă datorită rezultatelor din spaţiul $K(\Omega)$. De aceea spaţiul $K^m(\Omega)$ este un spaţiu Banach.

Sistemul fundamental $\mathscr{B}$ de vecinătăţi ale originii este constituit din sferele deschise

$$U_{r;\varepsilon} = \{\varphi\,;\ \varphi \in K^m(\Omega),\ p_r(\varphi) < \varepsilon\},\ 0 \leqslant r \leqslant m$$

unde $p_r(\varphi) = \sup\limits_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant r} \sup\limits_{x \in \Omega} | D_x^\alpha \varphi |$.

În ce priveşte convergenţa în $K^m(\Omega)$, aceasta rezultă din $K(\Omega)$ şi astfel avem

DEFINIŢIA 4. Spunem că şirul $(\varphi_i) \in K^m(\Omega)$ converge către $\varphi \in K^m(\Omega)$ dacă şi numai dacă $\forall\ r \leqslant m$, $\lim\limits_i p_r(\varphi_i - \varphi) = 0$ pe orice compact $\Omega_1 \subset \Omega$.
$r \in N_0$

Cu alte cuvinte $\varphi_i \to \varphi$ în $K^m(\Omega)$ dacă oricare ar fi $0 \leqslant r \leqslant m$, număr întreg, $D_x^r \varphi_i$ converge uniform către $D_x^r \varphi$ în Ω.

În particular, pentru $m = 0$ spaţiul $K^0(\Omega)$ se va nota $C(\Omega)$. Acest spaţiu este constituit din funcţiile complexe de clasa $C^0(R^n)$ şi avînd suporturile conţinute în mulţimea compactă $\Omega \subset R^n$. În acest fel spaţiul $C(\Omega)$ este un spaţiu Banach cu norma

$$\| \varphi \| = \sup_{x \in \Omega} | \varphi(x) | \tag{4}$$

Şirul $\varphi_i \in C(\Omega)$ converge către $\varphi \in C(\Omega)$ dacă $\lim\limits_i \sup\limits_{x \in \Omega} | \varphi_i - \varphi | = 0$, deci dacă φ_i converge uniform în Ω către φ.

Dacă $\Omega \subset \Omega' \subset R^n$ sînt mulţimi compacte, atunci conform definiţiilor spaţiilor $K^m(\Omega)$ şi $C(\Omega)$ obţinem relaţiile

$$K^m(\Omega) \subset K^m(\Omega'),\ C(\Omega) \subset C(\Omega'). \tag{5}$$

Pentru $m \leqslant m'(m, m' \in N_0)$ avem

$$K^{m'}(\Omega) \subset K^m(\Omega). \tag{5'}$$

Spaţiul $\mathscr{E}$

DEFINIŢIA 5. Fie funcţiile complexe $\varphi : R^n \to \Gamma$. Mulţimea de funcţii

$$\mathscr{E} = \{\varphi\,;\ \varphi \in C^\infty(R^n)\}$$

şi cu suport arbitrar se numeşte spaţiul de funcţii $\mathscr{E}$.

Scanned with OKEN Scanner

În raport cu operaţiile obişnuite de adunare şi înmulţire cu scalari, spaţiul $\mathscr{E}$ este un spaţiu vectorial pe corpul Γ.

Pentru $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in N_0^n$ şi $q \in N$ aplicaţia :

$$p_{q,\alpha} : \mathscr{E} \to R$$

cu $p_{q,\alpha}(\varphi) = \sup_{\|x\| \leqslant q} |D_x^\alpha \varphi(x)|$

este o seminormă pe $\mathscr{E}$ şi în consecinţă tot seminormă va fi şi

$$p_{q,m}(\varphi) = \sup_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} p_{q,\alpha}(\varphi) = \sup_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{\|x\| \leqslant q} |D_x^\alpha \varphi(x)| \tag{6}$$

Considerînd $q \in N$ şi $m \in N_0$, atunci $p_{q,m}$ reprezintă o familie filtrantă şi numărabilă de seminorme pe spaţiul $\mathscr{E}$. Cu ajutorul acestei familii filtrante şi numărabile de seminorme definim pe spaţiul $\mathscr{E}$ o topologie local convexă.

Sistemul fundamental $\mathscr{B}$ de vecinătăţi convexe ale originii spaţiului $\mathscr{E}$ este format din bulele

$$U_{q,m,\varepsilon} = \{\varphi ;\ \varphi \in \mathscr{E},\ p_{q,m}(\varphi) < \varepsilon\}.$$

Punînd $\varepsilon = \frac{1}{h}$, $h \in N$ obţinem un sistem fundamental numărabil de vecinătăţi ale originii spaţiului $\mathscr{E}$.

Urmînd aceeaşi demonstraţie ca pentru $K(\Omega)$ însă înlocuind compactul $\Omega \subset R^n$ cu compactul $\{x ;\ x \in R^n,\ \|x\| \leqslant q\}$, obţinem acelaşi rezultat ca spaţiul $\mathscr{E}$ este un spaţiu Hausdorff.

În ce priveşte convergenţa în $\mathscr{E}$, aceasta se obţine prin transpunerea adecvată a convergenţei din $K(\Omega)$.

Definiţia 6. Spunem că şirul $(\varphi_i) \in \mathscr{E}$ converge către $\varphi \in \mathscr{E}$ dacă şi numai dacă $\forall_{\substack{q \in N \\ m \in N_0}}$, $\lim_i p_{q,m}(\varphi_i - \varphi) = 0$ pe orice compact din R^n.

Deci $\varphi_i \to \varphi$ în $\mathscr{E}$ dacă $\forall_{\alpha \in N_0^n}$ şirul $D_x^\alpha \varphi_i$ converge uniform către $D_x^\alpha \varphi$ pe orice compact din R^n.

Se poate arăta că în raport cu structura de convergenţă introdusă şi care este echivalentă cu convergenţa în sensul topologiei spaţiului $\mathscr{E}$, spaţiul $\mathscr{E}$ este complet. În consecinţă spaţiul $\mathscr{E}$ este un spaţiu local convex separat şi complet ca şi spaţiul $K(\Omega)$.

Spaţiul K

Definiţia 7. Numim spaţiu K, mulţimea funcţiilor complexe $\varphi : R^n \to \Gamma$ de clasa $C^\infty(R^n)$ şi cu suport compact.

Acesta este un spaţiu vectorial pe corpul Γ, elementul nul 0 fiind funcţia $\varphi = 0$, $\forall\, x \in R^n$. Din definiţie rezultă că spaţiul $K(\Omega)$ este un subspaţiu *a* lui K, adică $K(\Omega) \subset K$. Deoarece $\forall\, \varphi \in K$ aceasta aparţine unui anume spaţiu $K(\Omega)$ deducem că spaţiul K este reuniunea spaţiilor $K(\Omega)$ după compactele $\Omega \subset R^n$. În consecinţă între spaţiile $K(\Omega)$, K şi $\mathscr{E}$ avem relaţiile :

$$K = \bigcup_\Omega K(\Omega), \quad K(\Omega) \subset K \subset \mathscr{E}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu ajutorul subspațiilor vectoriale $K(\Omega)$ vom defini pe spațiul K o topologie numită limita inductivă a spațiilor local convexe $K(\Omega)$.

PROPOZIȚIA 2. *Fie $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset R^n$ mulțimi compacte. Atunci topologia indusă de $K(\Omega_2)$ pe subspațiul său $K(\Omega_1)$ este identică cu topologia lui $K(\Omega_1)$.*

Demonstrație. Este suficient să arătăm că oricare ar fi vecinătatea V_1 a originii din $K(\Omega_1)$ există vecinătatea V_2 a originii din $K(\Omega_2)$ astfel încît $V_1 = V_2 \cap K(\Omega_1)$.

Considerînd

$$V_1 = \{\varphi\,;\ \varphi \in K(\Omega_1), \qquad p_m(\varphi) < \varepsilon\}$$
$$V_2 = \{\varphi\,;\ \varphi \in K(\Omega_2), \qquad p'_m(\varphi) < \varepsilon\}$$

unde $$p_m(\varphi) = \sup_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in \Omega_1} |D^\alpha_x \varphi|$$

$$p'_m(\varphi) = \sup_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in \Omega_2} |D^\alpha_x \varphi|$$

se verifică imediat că $V_1 = V_2 \cap K(\Omega_1)$. Deoarece orice vecinătate a originii din $K(\Omega_2)$ conține o vecinătate de tipul V_1 din $K(\Omega_1)$ și invers, rezultă că vecinătățile originii din $K(\Omega_1)$ sînt intersecții ale vecinătăților originii din $K(\Omega_2)$ cu spațiul $K(\Omega_1)$. Conform propoziției 3 din I.3.1 rezultă propoziția enunțată.

PROPOZIȚIA 3. *Mulțimea $\mathscr{B}$ de părți $V \subset K$ satisfăcînd condițiile:*
i) *V este convexă, echilibrată și absorbantă în K*
ii) $\forall_{K(\Omega) \subset K} V \cap K(\Omega)$ *este o vecinătate a originii în $K(\Omega)$ reprezintă un sistem fundamental de vecinătăți convexe ale originii spațiului K.*

Se verifică că mulțimea $\mathscr{B}$ astfel definită satisface definiția 1 din I.3.3.

Spațiul K astfel structurat topologic este un spațiu local convex. Remarcăm că topologia indusă de spațiul topologic K pe un subspațiu vectorial $K(\Omega)$ coincide cu topologia spațiului K. Putem înzestra spațiul K cu o structură de convergență care să coincidă cu noțiunea de convergență în sensul topologiei spațiului K.

DEFINIȚIA 8. Șirul $(\varphi_i) \in K$ converge către $\varphi \in K$ dacă și numai dacă $\exists_{K(\Omega) \subset K} \varphi_i \to \varphi$ în $K(\Omega)$.

Deci $\varphi_i \to \varphi$ în K dacă există un compact $\Omega \subset R^n$ astfel încît supp φ_i, supp $\varphi \subset \Omega$ și $\varphi_i \to \varphi$ în $K(\Omega)$, adică $\forall_{\alpha \in N_0^n} D^\alpha_x \varphi_i \overset{u}{\Rightarrow} D^\alpha_x \varphi$.

În acest fel convergența în spațiul K se reduce la convergența în spațiul $K(\Omega)$.

Se poate arăta că spațiul K este complet și separat.

Spațiul K înzestrat numai cu structura de convergență și deci fără structură topologică spunem că este înzestrat cu o pseudotopologie.

Procedeul folosit pentru spațiul K de-al înzestra cu o structură topologică de limită inductivă, se poate aplica și altor spații de funcții. Astfel dacă notăm cu K^m funcțiile complexe $\varphi : R^n \to \Gamma$, de clasa $C^m(R^n)$ și cu suport compact, atunci, deoarece $K^m = \bigcup_\Omega K^m(\Omega)$, topologia pe K^m va fi limita inductivă a topologiilor subspațiilor $K^m(\Omega)$.

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 9. Șirul $(\varphi_i) \in K^m$ converge către $\varphi \in K^m$ dacă și numai dacă $\exists_{K^m(\Omega) \subset K^m} \varphi_i \to \varphi$ în $K^m(\Omega)$.

În consecință supp φ_i, supp $\varphi \subset \Omega$ și $D_x^\alpha \varphi_i \overset{u}{\Rightarrow} D_x^\alpha \varphi \underset{\alpha \in N_0^n}{\forall} |\alpha| \leqslant m$.

Similar, dacă C reprezintă mulțimea funcțiilor complexe $\varphi : R^n \to \Gamma$, de clasa $C^0(R^n)$ și cu suport compact, atunci $C = \bigcup_\Omega C(\Omega)$ și topologia pe C va fi limita inductivă a topologiilor subspațiilor vectoriale $C(\Omega)$.

Un exemplu de funcție din spațiul K^m este funcția

$$\varphi(x) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} \sin^{m+1} \frac{x_i - a_i}{b_i - a_i} \pi, & x \in [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \\ 0, & x \notin [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \end{cases}$$

supp $\varphi = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$.

Funcția:

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon \exp\left(- \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \|x\|^2} \right), & \|x\| < \varepsilon \quad \varepsilon > 0 \\ 0, & \|x\| \geqslant \varepsilon \end{cases} \tag{7}$$

unde $\|x\| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$, $C_\varepsilon = \varepsilon^{-n} \left[\int_{\|x\| \leqslant 1} \exp\left(- \frac{1}{1 - \|x\|^2} \right) dx \right]^{-1}$ este o funcție din spațiul K. Suportul funcției ρ_ε este sfera $U_\varepsilon = \{x; x \in R^n, \|x\| \leqslant \varepsilon\}$.

Datorită valorii alese pentru constanta C_ε, funcția $\rho_\varepsilon(x)$ se bucură de proprietatea:

$$\int_{R^n} \rho_\varepsilon(x)\, dx = 1. \tag{8}$$

DEFINIȚIA 10. Spunem că funcția complexă $a : R^n \to \Gamma$ este un multiplicator pentru spațiul K dacă $\underset{\varphi \in K}{\forall}$ aplicația liniară $\varphi \to a\varphi$ este continuă de la K în K.

Prin urmare $a(x)$ este un multiplicator al spațiului K dacă $\underset{\varphi \in K}{\forall} a\varphi \in K$ și dacă $\varphi_i \to \varphi$ în K atunci $a\varphi_i \to a\varphi$ în K.

Se verifică că orice funcție $a \in C^\infty(R^n)$ este un multiplicator pentru spațiul K.

TEOREMA PARTIȚIEI UNITĂȚII. *Fie $\varphi \in K$ și $U_i (i = 1, 2, 3, \ldots, N)$ o acoperire finită a suportului funcției φ. Atunci există funcțiile $e_i \in K$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ cu proprietățile:*

1) $e_i(x) \in [0, 1]$, supp $e_i \subset U_i$

2) $\sum_{i=1}^{N} e_i(x) = 1$, $x \in$ supp φ

3) $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{N} e_i(x)\varphi(x)$.

Scanned with OKEN Scanner

Spaţiul $\mathcal{S}$

DEFINIŢIA 11. Numim spaţiu $\mathcal{S}$ mulţimea funcţiilor complexe $\varphi : R^n \to \Gamma$ de clasa $C^\infty(R^n)$ cu proprietatea : $\forall_{\alpha,\beta \in N_0^n}$

$$\lim_{\|x\|\to\infty} |x^\alpha D_x^\beta \varphi| = 0, \text{ adică } |x^\alpha D_x^\beta \varphi| < C_{\alpha,\beta}^{(1)}.$$

În consecinţă funcţiile din $\mathcal{S}$ sînt funcţii indefinit derivabile care pentru $\|x\| \to \infty$ tind la zero împreună cu toate derivatele lor de orice ordin, mai repede decît orice putere a lui $\|x\|^{-1}$.

Se constată că $\mathcal{S}$ este spaţiu vectorial avînd ca element nul pe $\varphi = 0$, $\forall x \in R^n$. Astfel de exemplu funcţia $\varphi(x) = \exp(-a\|x\|^2)$, $(a > 0)$, $x \in R^n$ este un element din spaţiul $\mathcal{S}$. Între spaţiile K, $\mathcal{S}$ şi $\mathcal{E}$ există evident relaţiile : $K \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$.

Cu ajutorul familiei filtrante de seminorme :

$$p_{l,m}(\varphi) = \sup_{\substack{|\alpha|\leqslant l \\ |\beta|\leqslant m}} \sup_{x\in R^n} |x^\alpha D_x^\beta \varphi(x)|, \ (l, m) \in N_0 \times N_0$$

spaţiul $\mathcal{S}$ se înzestrează cu o topologie local convexă.

Structura de convergenţă asociată topologiei spaţiului $\mathcal{S}$ este dată de următoarea :

DEFINIŢIA 12. Fie $\varphi \in \mathcal{S}$ şi şirul $(\varphi_i) \in \mathcal{S}$. Spunem că şirul (φ_i) converge către φ dacă şi numai dacă

$$\forall_{\substack{x\in R^n \\ (l,m)\in N_0\times N_0}} \lim_i P_{l,m}(\varphi_i - \varphi) = 0.$$

În consecinţă, $\varphi_i \to \varphi$ dacă $\forall_{\alpha,\beta\in N_0^n} x^\alpha D_x^\beta \varphi_i(x) \overset{u}{\underset{x\in R^n}{\Rightarrow}} x^\alpha D_x^\beta \varphi(x)$.

PROPOZIŢIA 4. *Convergenţa în spaţiul K este mai tare decît convergenţa în spaţiul $\mathcal{S}$.*

Demonstraţie. Fie $\varphi_i \to \varphi$ în K. Atunci $\exists_{K(\Omega)\subset K}$ $\varphi_i \to \varphi$ în $K(\Omega)$ şi deci $x^\alpha D_x^\beta \varphi_i$ converge uniform către $x^\alpha D_x^\beta \varphi$ în R^n, adică $\varphi_i \to \varphi$ în $\mathcal{S}$.

PROPOZIŢIA 5. *Spaţiul K este dens în $\mathcal{S}$.*

Demonstraţie. Va trebui să arătăm că $\forall_{\varphi\in S}$ $\exists_{(\varphi_i)\in K}$ $\varphi_i \to \varphi$ în $\mathcal{S}$.

Fie $\varphi \in \mathcal{S}$. Considerăm funcţia $\psi\left(\frac{x}{i}\right)(i \in N)$, unde $\psi(x) \in K$, astfel încît $\psi(x) = 1$ pentru $\|x\| < 1$ şi $\psi(x) = 0$, pentru $\|x\| \geqslant 2$. Atunci $\psi\left(\frac{x}{i}\right) \in K$ şi $\varphi_i(x) = \varphi(x)\psi\left(\frac{x}{i}\right) \in K$. Datorită construcţiei şirului $(\varphi_i)_{i\in N}$ avem $\varphi_i(x) = \varphi(x)$ pentru $\|x\| < i$, $\varphi_i = 0$ pentru $\|x\| \geqslant 2i$ deci $\varphi_i \to \varphi$ în $\mathcal{S}$. Analog se demonstrează că spaţiul K este dens în $\mathcal{E}$, considerînd $\varphi \in \mathcal{E}$.

---

1) x^α înseamnă $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in N_0^n$

Scanned with OKEN Scanner

Am văzut că în spaţiul K orice funcţie $a \in C^\infty(R^n)$ este un multiplicator al spaţiului. Această proprietate nu se mai păstrează în general pentru spaţiul S. Astfel dacă $a(x) = e^{\|x\|^2}$ şi $\varphi(x) = e^{-\|x\|^2}$ atunci $a \in C^\infty(R^n)$, $\varphi \in S$, dar $a\varphi = 1 \notin S$.

DEFINIŢIA 13. Spunem că o funcţie complexă $f \in C^0(R^n)$ este o funcţie temperată (cu creşterea lentă) dacă $\underset{\substack{a,b\in R^+\\ \alpha\in R}}{\exists} \ \underset{x\in R^n}{\forall} \ \|x\| > a : |f(x)| \leqslant b\|x\|^\alpha$.

Asemenea funcţii, conform definiţiei, nu cresc la infinit mai repede decît un polinom. În particular, dacă $f \in C^\infty(R^n)$ şi este o funcţie temperată împreună cu toate derivatele sale, atunci ele sînt caracterizate prin relaţia :

$$|D^\beta f(x)| \leqslant C_\beta(1+\|x\|)^{m_\beta}, \ \underset{\substack{\beta\in N_0^n\\ x\in R^n}}{\forall}, \ m_\beta \in N_0.$$

Aceste funcţii constituie multiplicatori pentru spaţiul S. Remarcăm de asemenea că din definiţia elementelor spaţiului S rezultă că $\underset{\substack{\varphi\in S\\ \alpha,\beta\in N_0^n}}{\forall} x^\alpha D^\beta\varphi \in S$ este mărginită şi integrabilă pe R^n.

În consecinţă între spaţiile S şi L^p avem relaţia $S(R^n) \subset L^p(R^n)$, $p \geqslant 1$.

Spaţiile vectoriale topologice şi local convexe ($K(\Omega)$, $K^m(\Omega)$, $\mathcal{E}$, K, S) prezentate, se vor numi spaţii fundamentale, iar funcţiile dintr-un asemenea spaţiu, funcţii fundamentale.

Distribuţiile definite pe aceste spaţii fundamentale sînt suficiente pentru consideraţiile teoretice şi aplicative ce se vor expune în continuare. Vom nota cu Φ un spaţiu fundamental.

§ 5. Spaţiul distribuţiilor

DEFINIŢIA 1. Numim distribuţie o funcţională liniară şi continuă definită pe un spaţiu fundamental Φ.

În felul acesta fiecărei funcţii $\varphi \in \Phi$ i se asociază după o anumită lege f un număr complex (f, φ) care satisface condiţiile :

1° $\underset{\substack{\varphi_1,\varphi_2\in\Phi\\ \alpha_1\ \alpha_2\in\Gamma}}{\forall} (f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1(f, \varphi_1) + \alpha_2(f, \varphi_2)$

2° $\underset{\substack{(\varphi_i)_{i\in N}\in\Phi\\ \varphi\in\Phi}}{\forall} \varphi_i \overset{\Phi}{\to} \varphi \Rightarrow \lim_i (f, \varphi_i) = (f, \varphi)$.

Condiţia 1° exprimă liniaritatea funcţionalei iar condiţia 2° continuitatea. Mulţimea distribuţiilor definite pe Φ se notează cu Φ' şi se numeşte dualul topologic al spaţiului fundamental Φ. Conform propoziţiei 1 din I.2.2, Φ' este un subspaţiu al dualului algebric Φ^* al lui Φ, deci este un spaţiu vectorial pe corpul Γ în raport cu operaţiile :

i) $\underset{f_1,f_2\in\Phi'}{\forall} (f_1 + f_2, \varphi) = (f_1, \varphi) + (f_2, \varphi)$

ii) $\underset{\substack{f\in\Phi'\\ \alpha\in\Gamma}}{\forall} (\alpha f, \varphi) = \alpha(f, \varphi)$.

Dualul topologic Φ' se poate înzestra cu o topologie numită topologie slabă prin definirea convergenţei slabe pentru şiruri $(f_i)_{i\in N} \in \Phi'$.

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 2. Fie $f \in \Phi'$ și șirul $(f_i)_{i\in N} \in \Phi'$. Spunem că șirul $(f_i)_{i\in N}$ converge către f și vom scrie $\lim_i f_i = f$ dacă și numai dacă $\forall_{\varphi\in\Phi} \lim_i (f_i, \varphi) = (f, \varphi)$. Deci $f_i \to f$ numai dacă șirul de numere complexe (f_i, φ) converge simplu către numărul complex (f, φ).

Dualul topologic Φ' înzestrat cu această structură de convergență se numește spațiul distribuțiilor și se va nota tot prin Φ'. Se poate arăta că spațiul distribuțiilor Φ' este un spațiu local convex separat și complet. În consecință

$$\forall_{\substack{(f_i)\in\Phi' \\ \varphi\in\Phi}} (f_i, \varphi) \to a \in \Gamma \Rightarrow \exists_{f\in\Phi'} a = (f, \varphi).$$

În raport cu spațiul fundamental Φ considerat obținem diferite tipuri de distribuții. Astfel distribuțiile definite pe K se numesc distribuții L. Schwartz. Dacă $\Phi = K^m$ atunci distribuțiile (K'^m) se numesc distribuții de ordin finit $\leqslant m$. Din acest motiv distribuțiile din K' se mai numesc și distribuții de ordin infinit. Distribuțiile definite pe $C(m=0)$ se numesc măsuri, iar distribuțiile definite pe S distribuții temperate. Deoarece $K \subset S$ și convergența din K este mai tare decît convergența în S (propoziția 4 din I.4.2) rezultă că între dualele lor topologice există relația $S' \subset K'$. Pe de altă parte, deoarece spațiul K este dens în S (propoziția 5, I.4.2) rezultă că unele distribuții temperate se pot obține prin prelungirea unor distribuții definite pe K și prelungirea se realizează în mod unic.

O clasă importantă de distribuții sînt distribuțiile de tip funcție sau distribuțiile regulate. Aceste distribuții sînt generate de funcții local integrabile. Astfel dacă $f: R^n \to \Gamma$ este o funcție local integrabilă pe R^n atunci funcționala $T_f : K \to \Gamma$ dată de

$$(T_f, \varphi) = \int_{R^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \varphi \in K \tag{1}$$

definește o distribuție pe spațiul K.

Într-adevăr, liniaritatea este evidentă datorită aditivității integralei. Pentru a demonstra continuitatea funcționalei T_f considerăm șirul $(\varphi_i)_{i\in N} \in K$ convergent în K către $\varphi \in K$.

Atunci există subspațiul $K(\Omega)$ în care $\varphi_i \to \varphi$. Deci $\forall_{i\in N} \operatorname{supp} \varphi_i \subset \Omega$, $\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega$ și avem:

$|(T_f, \varphi_i) - (T_f, \varphi)| \leqslant \int_\Omega |f(x)|\mathrm{d}x \cdot \sup_\Omega |\varphi_i - \varphi|$. Deoarece $\varphi_i \to \varphi$ în $K(\Omega)$ avem $\lim_i \sup_\Omega |\varphi_i - \varphi| = 0$, deci $\lim_i (T_f, \varphi_i) = (T_f, \varphi)$. În consecință funcționala T_f asociată funcției local integrabile f prin formula (1) este o distribuție pe K numită distribuție de tip funcție. Uneori în loc de distribuția T_f generată de f vom scrie simplu f.

PROPOZIȚIA 1. *Fie $f_i : R^n \to \Gamma$ $(i \in N)$ un șir de funcții local integrabile, uniform convergente pe orice compact $\Omega \subset R^n$ către funcția $f: R^n \to \Gamma$. Atunci f este local integrabilă și $T_{f_i} \to T_f$ în K'.*

Demonstrație. Deoarece $f_i \overset{u}{\Rightarrow} f$ pe orice compact Ω, f este local integrabilă și $\int_\Omega f_i \, dx \to \int_\Omega f \, dx$. Pentru $\underset{\varphi \in K}{\forall}$ supp $\varphi \subset \Omega$ avem:

$$|(T_{f_i}, \varphi) - (T_f, \varphi)| \leqslant \int_\Omega |\varphi| \cdot |f_i - f| dx \leqslant \text{măs}\,(\Omega) \sup_\Omega |\varphi(x)| \cdot$$

$$\cdot \sup_\Omega |f_i(x) - f(x)|.$$

Cum măs(Ω), $\sup_\Omega |\varphi(x)|$ sînt mărginite și $\lim_i \sup_\Omega |f_i(x) - f(x)| = 0$ obținem $\lim_i (T_{f_i}, \varphi) = (T_f, \varphi)$, adică $T_{f_i} \to T_f$ în K'.

Dacă f_1 și f_2 sînt funcții local integrabile pe R^n și $f_1 = f_2$ a. p. t. atunci și distribuțiile T_{f_1}, T_{f_2} generate de ele vor fi egale:

$$T_{f_1} = T_{f_2}, \text{ deoarece } \underset{\varphi \in K}{\forall} \text{ avem } \int_{R_n} f_1 \varphi(x) dx = \int_{R_n} f_2 \varphi(x) dx.$$

Remarcăm că nu orice funcție local integrabilă definește o distribuție temperată, ci numai funcțiile local integrabile temperate care pentru $m \geqslant 0$ satisfac condiția

$$\int_{R_n} |f(x)| \, (1 + \|x\|)^{-m} \, dx < \infty.$$

Distribuțiile care nu pot fi reprezentate sub forma integrală (1) se numesc distribuții singulare. Între aceste distribuții singulare un loc important, datorită proprietăților sale, îl ocupă distribuția lui Dirac δ_a, $a \in R^n$. Această distribuție este definită prin relația:

$$(\delta_a, \varphi) = \varphi(a), \quad \varphi \in K. \tag{2}$$

În particular, dacă $a = 0 \in R^n$ în loc de δ_0 vom scrie δ sau încă $\delta(x)$. De asemenea în loc de δ_a vom scrie uneori $\delta(x - a)$, spunînd că distribuția lui Dirac este concentrată în punctul a.

DEFINIȚIA 3. Spunem că distribuția $f \in K'$ este nulă pe mulțimea deschisă $A \subset R^n$ dacă $\underset{\varphi \in K}{\forall}$ supp $\varphi \subset A$ avem $(f, \varphi) = 0$ și vom scrie $f = 0$, $x \in A$.

În acest fel spunem că distribuțiile f, $g \in K'$ sînt egale pe mulțimea deschisă A dacă $(f - g, \varphi) = 0$, $\underset{\varphi \in K}{\forall}$ supp $\varphi \subset A$ și vom scrie $f = g$, $x \in A$.

În particular $f = g$ pe R^n dacă $\underset{\varphi \in K}{\forall} (f, \varphi) = (g, \varphi)$.

DEFINIȚIA 4. Fie distribuția $f \in K'$. Numim suport al distribuției f și vom nota supp f, complementara reuniunii mulțimilor deschise pe care se anulează distribuția f.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă suportul unei distribuţii este mărginit atunci fiind şi închis vom spune că distribuţia este cu suport compact.

Se poate arăta că orice distribuţie cu suport compact este o funcţională liniară şi continuă pe spaţiul $\mathscr{E}$, deci o distribuţie din spaţiul $\mathscr{E}'$. Deoarece $S \subset \mathscr{E}$ şi convergenţa unui şir din S implică şi convergenţa în spaţiul $\mathscr{E}$, rezultă că între dualele lor există relaţia $\mathscr{E}' \subset S'$. În consecinţă, orice distribuţie din $\mathscr{E}'$, deci cu suport compact, este o distribuţie temperată. Astfel deoarece $K \subset S \subset \mathscr{E}$, între dualele lor topologice avem relaţia $K' \supset S' \supset \mathscr{E}'$.

În particular observăm că supp $\delta_a = \{a\}$ adică δ_a este o distribuţie cu suport compact.

Funcţia lui Heaviside

$$\theta : R \to R, \quad \theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geqslant 0 \end{cases} \tag{3}$$

generează distribuţia de tip funcţie T_θ, $(T_\theta, \varphi) = \int_0^\infty \varphi(x)\,dx$, $\varphi \in K$

pentru care supp $T_\theta = [0, \infty) = R_+$.

În general distribuţiile T_f generate de funcţii local integrabile f au ca suport închiderea mulţimii punctelor în care funcţia este diferită de zero, adică acesta coincide cu suportul lui f:

$$\text{supp } T_f = \overline{\{x\,;\, x \in R^n,\, f(x) \neq 0\}} = \text{supp } f.$$

În legătură cu prelungirea distribuţiilor cu suport compact pe spaţiul S, ca elemente din spaţiul S', are loc

PROPOZIŢIA 2. *Fie $f \in \mathscr{E}' \subset K'$ şi supp $f = \Omega$. Atunci f se prelungeşte pe S în mod unic ca element din S' conform formulei:*

$$(f, \varphi) = (f, h\varphi), \underset{\substack{\varphi \in S \\ h \in K}}{\forall} h(x) = 1 \text{ pe o vecinătate compactă a lui } \Omega \subset \text{supp } h. \tag{4}$$

Demonstraţie. Fie $\varphi_i \to \varphi$ în S. Atunci $h\varphi_i, h\varphi \in K$ şi $h\varphi_i \to h\varphi$ în K. Deci $\lim_i (f, h\varphi_i) = (f, h\varphi) = (f, \varphi)$, deoarece valorile lui h şi φ pe supp f coincid.

Unicitatea prelungirii rezultă din propoziţia 5, I.4.2, referitoare la densitatea spaţiului K în S.

Să arătăm că această prelungire nu depinde de alegerea funcţiei h.

Într-adevăr pentru un $h_1 \in K$ având valoarea 1 pe o vecinătate compactă a lui Ω avem:

$$(f, \varphi h) - (f, h_1\varphi) = (f, (h - h_1)\varphi).$$

Dar $h - h_1 = 0$ pe o vecinătate compactă a lui Ω, deci supp $(h - h_1)$ este inclus în închiderea complementarei vecinătăţii compacte a lui Ω. În consecinţă

$$(f, (h - h_1)\varphi) = 0 \text{ pe } C\Omega$$

adică $(f, \varphi h) = (f, \varphi h_1)$.

Observaţia 1. Ţinînd seamă că spaţiul K este dens în $\mathscr{E}$ şi urmînd demonstraţia de mai înainte, rezultă că orice distribuţie cu suport compact

Scanned with OKEN Scanner

$f \in K'$ se poate prelungi (într-o distribuție pe spațiul $\mathscr{E}$) conform formulei (4) cu $\varphi \in \mathscr{E}$: $(f, \varphi) = (f, h\varphi)$, $\underset{\substack{\varphi \in \mathscr{E} \\ h \in K}}{\forall} h(x) = 1$ pe o vecinătate compactă a lui $\Omega = \operatorname{supp} f, \Omega \subset \operatorname{supp} h$.

Operații cu distribuții. Dacă $f \in K'$ și $\psi \in C^\infty(R^n)$ atunci produsul ψf reprezintă o nouă distribuție din K' definită de formula :

$$(\psi f, \varphi) = (f, \psi\varphi), \quad \underset{\varphi \in K}{\forall}. \tag{5}$$

Corectitudinea formulei de definiție rezultă din faptul că funcția $\psi \in C^\infty(R^n)$ este un multiplicator al spațiului K.

Suportul produsului ψf verifică relația : $\operatorname{supp} \psi f \subset \operatorname{supp} \psi \cap \operatorname{supp} f$.

În particular are loc

$$\psi \delta_a = \psi(a)\, \delta_a, \quad \underset{\psi \in C^0(R^n)}{\forall}. \tag{6}$$

Într-adevăr putem scrie pentru $\varphi \in K$:

$$(\psi \delta_a, \varphi) = (\delta_a, \varphi\psi) = \psi(a)\varphi(a) = (\psi(a)\delta_a, \varphi)$$

de unde pe baza egalității a două distribuții obținem relația (6).

Translația, simetria și omotetia distribuțiilor. Fie funcția $f : R^n \to \Gamma$ și $a \in R^n$. Translația funcției f de vector $a \in R^n$ se definește prin formula

$$(\tau_a f)(x) = f(x - a). \tag{7}$$

Din definiția suportului rezultă

$$\operatorname{supp} \tau_a f = a + \operatorname{supp} f. \tag{8}$$

Simetrica față de origine a funcției f se va nota $f^\vee$ și este dată de relația :

$$(f^\vee)(x) = f(-x). \tag{9}$$

Se verifică ușor relațiile :

$$(f^\vee)^\vee = f, \quad \operatorname{supp} f^\vee = -\operatorname{supp} f. \tag{10}$$

Translația, simetria și omotetia distribuției $f \in K'$ se definesc prin formulele :

$$(\tau_a f, \varphi) = (f, \tau_{-a}\varphi), \quad \underset{\substack{\varphi \in K \\ a \in R^n}}{\forall} \tag{11}$$

$$(f^\vee, \varphi) = (f, \varphi^\vee).$$

Fie $x, y \in R^n$ și matricea diagonală a, anume

$$a = (a_{ij}\, \delta_{ij}), \quad \text{unde} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

este simbolul lui Kronecker,

Scanned with OKEN Scanner

Transformarea prin omotetie se defineşte prin relaţia

$$x = ay$$

unde x, y sînt matrici coloană, iar $\det a = a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$. Dacă $\det a \neq 0$ atunci

$$a^{-1} = (a_{ij}^{-1}\, \delta_{ij}) \text{ şi } y = a^{-1}x.$$

În particular, dacă $a_{ii} = -1$ atunci obţinem simetria, deci

$$x = -y.$$

Fie $f \in K'(R^n)$ şi $\varphi \in K(R^n)$.

Transformarea prin omotetie a distribuţiei $f \in K'(R^n)$ este definită prin relaţia

$$(f(ay),\ \varphi(y)) = \frac{1}{|\det a|}\left(f(x),\ \varphi\,(a^{-1}\ x)\right). \tag{12}$$

În particular dacă $a_{ii} = \alpha \neq 0$ atunci $\det a = \alpha^n$

$$ay = \alpha y,\quad a^{-1}x = \frac{x}{\alpha}$$

şi astfel

$$(f(\alpha x),\ \ \varphi(x)) = \frac{1}{|\alpha|^n}\left(f(x),\ \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right),\ x \in R^n,\ \alpha \in R,\ \alpha \neq 0.$$

Pentru distribuţia lui Dirac obţinem

$$(\delta(\alpha x),\ \varphi(x)) = \frac{1}{|\alpha|^n}\left(\delta(x),\ \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = \frac{1}{|\alpha|^n}\ \varphi(0) = \left(\frac{\delta(x)}{|\alpha|^n},\ \varphi(x)\right)$$

de unde

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|^n}\,\delta(x). \tag{13}$$

Din (11) obţinem $\tau_{a+b} f = \tau_a(\tau_b f) = \tau_b(\tau_a f)$ deci $\tau_a(\tau_b) = \tau_{a+b}$.

Din definiţie rezultă proprietatea

$$\operatorname{supp} \tau_a f \subset a + \operatorname{supp} f. \tag{14}$$

Ca un caz particular al relaţiei (11) avem

$$(\tau_a \delta,\ \varphi) = (\delta,\ \tau_{-a}\varphi) = \varphi(a)$$

de unde

$$\tau_a \delta = \delta_a \tag{15}$$

Fie $f \in K'$ şi $\psi \in C^\infty(R^n)$. Avem

$$(\psi f)^\vee = \psi^\vee f^\vee$$

$$\tau_a(\psi f) = (\tau_a \psi)\,(\tau_a f),\ a \in R^n. \tag{16}$$

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr $((\psi f)^\vee, \varphi) = (f, (\psi^\vee \varphi)^\vee) = (f^\vee \psi^\vee, \varphi)$. Pentru a doua relație avem $(\tau_a(\psi f), \varphi) = (f, \psi\tau_{-a}\varphi) = (f, \tau_a(\varphi\tau_{-a}\psi)) = (\tau_a\psi\tau_a f, \varphi)$.

Fie $f \in K'$ și D^α derivata parțială de ordinul $|\alpha|$. Derivata de ordinul $|\alpha|$ a distribuției f este dată de relația:

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha \varphi), \underset{\varphi \in K}{\forall}. \tag{17}$$

Derivata distribuțiilor nu depinde de ordinea de derivare, deci este satisfăcută relația:

$$D^{\alpha+\beta} f = D^\alpha(D^\beta f) = D^\beta (D^\alpha f), f \in K'.$$

Astfel pentru derivata distribuției generată de funcția lui Heaviside (3), avem

$$\frac{d\theta}{dx} = \delta. \tag{18}$$

Într-adevăr, conform definiției derivatei putem scrie $\underset{\varphi \in K}{\forall}$

$$(T_\theta', \varphi) = -(T_\theta, \varphi') = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi)$$

de unde $T_0' = \delta$ sau $\theta'(x) = \delta(x)$.

Exemplul 1. Considerăm operatorul:

$$D = 3\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in R^2$$

și distribuția $E(x, t) \in K'(R^2)$

$$E(x, t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{4}(\theta(x+t) - \theta(3x-t)), & t \geqslant 0 \end{cases}$$

$\theta \in K'(R)$ fiind distribuția lui Heaviside.
Să arătăm că

$$DE(x, t) = \delta(x, t).$$

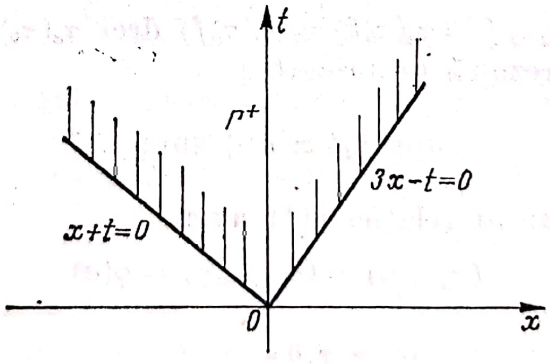

Fig. 1

În acest scop observăm că $E(x, t)$ ia valoarea $\frac{1}{4}$ în interiorul conului Γ^+ din figura 1 și este nulă în exteriorul lui.

Scanned with OKEN Scanner

$\forall_{\varphi \in K(R^2)}$ avem :

$$(DE,\ \varphi) = (E, D\varphi) = \frac{3}{4}\int_{\Gamma+} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\, dx\, dt - \frac{1}{2}\int_{\Gamma+} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}\, dx\, dt - \frac{1}{4}\int_{\Gamma+} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\, dx\, dt.$$

Pentru cele trei integrale din membrul drept obţinem :

$$\int_{\Gamma+} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\, dx\, dt = \int_{-\infty}^{0} dx \int_{|x|}^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\, dt + \int_{0}^{\infty} dx \int_{|3x|}^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\, dt =$$

$$= -\int_0^\infty \frac{\partial \varphi(+t, \tilde{t})}{\partial t}\, dt - \int_0^\infty \frac{\partial \varphi(t, 3t)}{\partial t}\, dt$$

$$\int_{\Gamma+} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}\, dx dt =$$

$$= \int_0^\infty dt \int_{-t}^{\frac{t}{3}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}\, dx = \int_0^\infty \left[\frac{\partial \varphi\left(\frac{t}{3}, t\right)}{\partial t} - \frac{\partial \varphi(-t, t)}{\partial t} \right] dt$$

$$\int_{\Gamma+} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\, dx dt = \int_0^\infty dt \int_{-t}^{\frac{t}{3}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\, dx = \int_0^\infty \left[\frac{\partial \varphi\left(\frac{t}{3}, t\right)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi(-t, t)}{\partial x} \right] dt.$$

În consecinţă :

$$(DE,\ \varphi) = -\frac{1}{4}\int_0^\infty \left[\frac{\partial \varphi(-t,t)}{\partial t} - \frac{\partial \varphi(-t, t)}{\partial x} \right] dt - \frac{1}{4}\int_0^\infty \left[3\, \frac{\partial \varphi\left(\frac{t}{3} t, \right)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi\left(\frac{t}{3}, t\right)}{\partial x} \right] dt = (\delta(x, t),\ \varphi(x, t))$$

deoarece

$$\frac{d\varphi(-t, t)}{dt} = -\frac{\partial \varphi(-t, t)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(-t, t)}{\partial t}$$

$$\frac{d\varphi\left(\frac{t}{3}, t\right)}{dt} = \frac{1}{3}\frac{\partial \varphi\left(\frac{t}{3}, t\right)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi\left(\frac{t}{3}, t\right)}{\partial t}$$

Deci $DE = \delta(x, t)$.

Exemplul 2. Fie $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$, o funcţie armonică pentru $r > 0$ definită pe R^3. Funcţia este local integrabilă deoarece $\int_\Omega \frac{1}{r}\, dx$ există pe orice $\Omega \subset R^3$. În consecinţă $f = \frac{1}{r}$ generează o distri-

Scanned with OKEN Scanner

buție de tip funcție. Notînd cu $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ operatorul lui Laplace în R^3, pentru $\varphi \in K(R^3)$ avem

$$\left(\Delta \frac{1}{r}, \varphi\right) = \left(\frac{1}{r}, \Delta\varphi\right) = \int_{R^3} \frac{1}{r} \Delta\varphi \, dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{r \geqslant \varepsilon} \frac{1}{r} \Delta\varphi \, dx.$$

În baza formulei lui Green

$$\int_\Omega (f\Delta\varphi - \varphi\Delta f) \, dx = \int_S \left(f \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial f}{\partial n}\right) dS,$$ unde n este normala exterioară la suprafața S ce mărginește domeniul Ω, acesta fiind coroana sferică $\varepsilon < r < a$, cu supp $\varphi \subset U_a$ deci cu suportul lui φ inclus în sfera cu centrul în 0 și raza a.
Avem

$$\int_{r \geqslant \varepsilon} \frac{1}{r} \Delta\varphi \, dx = \int_{\varepsilon < r < a} \frac{1}{r} \Delta\varphi \, dx = -\int_{S_\varepsilon} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \varphi \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS$$

unde S_ε este sfera cu centrul în origine și rază ε. Aceasta datorită faptului că $\Delta \frac{1}{r} = 0$ pentru $r > \varepsilon$ iar φ, $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ sînt nule pe sfera U_a și în afara ei.

Deci

$$\int_{r \geqslant \varepsilon} \frac{1}{r} \Delta\varphi \, dx = -\left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial r} + \frac{1}{\varepsilon^2} \varphi(\xi)\right] 4\pi\varepsilon^2, \quad \xi \in U_\varepsilon$$

adică

$$\int_{r \geqslant \varepsilon} \frac{1}{r} \Delta\varphi \, dx = -4\pi\varphi(\xi) - 4\pi\varepsilon \frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial r}.$$

Pentru $\varepsilon \to 0$ avem $\xi \to 0$, deci $\left(\Delta \frac{1}{r}, \varphi\right) = -4\pi\varphi(0)$.

În consecință $\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta_0$. Pentru $n \geqslant 3$ avem rezultatul $\Delta \frac{1}{r^{n-2}} = -(n-2)S_n\delta_0$, unde S_n reprezintă aria sferei de rază unitate din R^n.

PROPOZIȚIA 3. *Dacă* $f \in K'$ *atunci* supp $D^\alpha f \subset$ supp f.

Demonstrație. Fie $f = 0$, $x \in A \subset R^n$. Pentru $\forall_{\varphi \in K}$ supp $\varphi \subset A$ avem $(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha\varphi) = 0$ deoarece supp $D^\alpha\varphi \subset A$. Cum $\forall_{\varphi \in K}$ supp $\varphi \subset A$, $(f, \varphi) = 0$ și obținem $D^\alpha f = 0$, $x \in A$.

Prin considerarea complementarelor mulțimilor pe care distribuțiile f și $D^\alpha f$ se anulează obținem relația cerută.

Dintre proprietățile derivatei unei distribuții menționăm și comutativitatea față de operatorul de translație.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, dacă $f \in K'$, $a \in R^n$ avem

$$D^\alpha(\tau_a f) = \tau_a(D^\alpha f). \tag{19}$$

Într-adevăr, putem scrie

$$(D^\alpha(\tau_a f), \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, \tau_{-a} D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha(\tau_{-a}\varphi))$$

deoarece $D^\alpha(\tau_a \varphi) = \tau_a(D^\alpha \varphi)$.

În consecinţă obţinem $(D^\alpha(\tau_a f), \varphi) = (D^\alpha f, \tau_a \varphi) = (\tau_a(D^\alpha f), \varphi)$.

În raport cu simetria, operatorul de derivare verifică relaţia :

$$D^\alpha(f^\vee) = (-1)^{|\alpha|}(D^\alpha f)^\vee, \ f \in K'. \tag{20}$$

Deoarece $\forall_{\varphi \in K}$ avem $D^\alpha(\varphi^\vee) = (-1)^{|\alpha|}(D^\alpha \varphi)^\vee$ putem scrie

$$(D^\alpha(f^\vee), \varphi) = (f, D^\alpha(\varphi^\vee)) = ((-1)^{|\alpha|}(D^\alpha f)^\vee, \varphi).$$

PROPOZIŢIA 4. *Fie f o funcţie de clasa $C^1(R)$ cu excepţia punctului x_0 unde are o discontinuitate de speţa întîi cu saltul :*

$$s_0(f) = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0).$$

Are loc formula

$$f' = \tilde{f}' + s_0(f)\delta_{x_0}. \tag{21}$$

Demonstraţie. Pentru $\forall_{\varphi \in K}$ avem $(f', \varphi) = -(f, \varphi') = -\lim_{\varepsilon \to +0} \left[\int_{-\infty}^{x_0 - \varepsilon} f\varphi' \, dx + \right.$

$$\left. + \int_{x_0 + \varepsilon}^{\infty} f\varphi' \, dx \right] = s_0(f)\varphi(x_0) + (\tilde{f}', \varphi) = (s_0(f)\delta_{x_0} + \tilde{f}', \varphi).$$

Menţonăm că $\tilde{f}'$ reprezintă distribuţia de tip funcţie corespunzătoare derivatei funcţiei f în sens obişnuit iar f' derivata funcţiei în sensul distribuţiilor.

COROLARUL 1. *Dacă funcţia f este de clasa $C^1(R)$ cu excepţia punctelor $x_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ unde are discontinuităţi de speţa întîi cu salturile $s_i(f) = f(x_i + 0) - f(x_i - 0)$ atunci*

$$f' = \tilde{f}' + \sum_{i=1}^{P} s_i(f)\delta_{x_i}. \tag{22}$$

COROLARUL 2. *Fie f o funcţie de clasa $C^l(R)$ cu excepţia punctului x_0 unde atît funcţia cît şi derivatele ei pînă la ordinul l au discontinuităţi de speţa întîi cu salturile $s_i(\tilde{f}^{(i)})$ corespunzătoare funcţiei $\tilde{f}^{(i)} (i = 0, 1, 2, \ldots, l-1)$. Atunci avem formula*

$$f^{(p)} = \tilde{f}^{(p)} + \sum_{i=0}^{p-1} s_i(\tilde{f}^{(i)})\delta_{x_0}^{(p-i-1)}, \ p = 1, 2, \ldots, l. \tag{23}$$

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, prin derivarea succesivă în sensul distribuţiilor a formulei (21) obţinem formula căutată.

DEFINIŢIA 5. Spunem că şirul $f_i (i \in N)$ de funcţii local integrabile definite pe R^n este un şir reprezentativ Dirac, dacă în spaţiul distribuţiilor K' avem $\lim_i f_i = \delta(x)$.

Exemplul 3. Funcţiile $\rho_\varepsilon (\varepsilon > 0)$ definite prin relaţia (7) din I.4.2 formează o familie reprezentativă Dirac.

Demonstraţie. Deoarece $\int_{R^n} \rho_\varepsilon(x)\,dx = 1$ pentru $\forall_{\varphi \in K}$ avem

$$|(\rho_\varepsilon, \varphi) - \varphi(0)| \leqslant \int_{R^n} \rho_\varepsilon(x)\,|\varphi(x) - \varphi(0)|\,dx = \int_{U_\varepsilon} \rho_\varepsilon(x)\,|\varphi(x) - \varphi(0)|\,dx.$$

În baza continuităţii în origine, putem scrie $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \varepsilon_0$ pentru $\|x\| < \eta_{\varepsilon_0}$. Considerînd $\varepsilon \leqslant \eta_{\varepsilon_0}$ atunci supp $\rho_\varepsilon = U_\varepsilon \subset U_{\eta_{\varepsilon_0}}$, deci $|(\rho_\varepsilon, \varphi) - \varphi(0)| < \varepsilon_0$. În consecinţă $\lim_{\varepsilon \to +0} (\rho_\varepsilon, \varphi) = \varphi(0) = (\delta, \varphi)$ adică $\lim_{\varepsilon \to +0} \rho_\varepsilon = \delta(x)$. Remarcăm că ρ_ε este o familie reprezentativă Dirac din spaţiul fundamental $K(R^n)$.

În scopul aproximării funcţiilor continue prin polinoame prezintă interes şirul reprezentativ Dirac de tip Landau.

Exemplul 4. Şirul $(L_i^*)_{i \in N}$ de polinoame definite pe R^n prin

$$L_i^*(x) = \begin{cases} L_i(x), & \|x\| \leqslant \lambda \\ 0, & \|x\| > \lambda \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$

unde

$$L_i(x) = \frac{1}{C_i}(\lambda^2 - \|x\|^2)^i, \quad C_i = \int_{\|x\| \leqslant \lambda} (\lambda^2 - \|x\|^2)^i\,dx$$

se numeşte şir Landau. Observăm că $L_i^* \in K^{i-1}(R^n)$, supp $L_i^* = \{x;\ x \in R^n, \|x\| \leqslant \lambda\}$ deci L_i^* este de clasa $C^{i-1}(R^n)$ şi cu suport compact. Să arătăm că $(L_i^*)_{i \in N}$ este un şir reprezentativ Dirac. Într-adevăr $\forall_{\varphi \in K} |(L_i^*, \varphi) - \varphi(0)| \leqslant$ $\leqslant \int_{R^n} L_i^*(x)\,|\varphi(x) - \varphi(0)|\,dx$ deoarece $\int_{R^n} L_i^*(x)\,dx = 1$ şi $L_i^*(x) \geqslant 0$. În baza continuităţii în origine a funcţiei $\varphi \in K$ avem $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \varepsilon$ pentru $\|x\| < \eta$. Dacă $\eta \geqslant \lambda$ atunci $\int_{R^n} L_i^*(x)\,|\varphi(x) - \varphi(0)|\,dx < \varepsilon$ deci $\lim_i L_i^* = \delta$. Dacă $\eta < \lambda$ putem scrie

$$\int_{R^n} L_i^*(x)\,|\varphi(x) - \varphi(0)|\,dx = \int_{\|x\| < \eta} L_i(x)\,|\varphi(x) - \varphi(0)|\,dx +$$

$$+ \int_{\eta \leqslant \|x\| \leqslant \lambda} L_i(x)\,|\varphi(x) - \varphi(0)|\,dx < \varepsilon + \frac{M}{C_i} \int_{\eta \leqslant \|x\| \leqslant \|\lambda} (\lambda^2 - \|x\|^2)^i\,dx$$

unde $M = \sup_{x \in R^n} |\varphi(x) - \varphi(0)|$.

Scanned with OKEN Scanner

Dar

$$\int_{\eta\in\|x\|\leqslant\lambda} (\lambda^2 - \|x\|^2)^i \, dx \leqslant A(\lambda^2 - \eta^2)^i ; \; A = \int_{\eta\leqslant|x|\leqslant\lambda} dx$$

și

$$C_i \geqslant \int_{\|x\|\leqslant\frac{1}{2}\eta} \left((\lambda^2 - \|x\|^2)^i \, dx \geqslant B\left(\lambda^2 - \frac{\eta^2}{4}\right)^i ; \; B = \int_{|x|\leqslant\frac{1}{2}\eta} dx.$$

În consecință

$$|(L_i^*, \varphi) - \varphi(0)| < \varepsilon + \frac{MA}{B} r^i ; \; r = \left(\frac{\lambda^2 - \eta^2}{\lambda^2 - \frac{\eta^2}{4}}\right) < 1$$

și cum ε este arbitrar, pentru $i \to +\infty$ obținem

$$\lim_i (L_i^*, \varphi) = \varphi(0) = (\delta, \varphi) ; \text{ adică } \lim_i L_i^* = \delta.$$

Considerînd în șirul lui Landau $(L_i^*)_{i\in N}$, $i = p$ fixat și λ variabil, obținem familia de șiruri $(L_\lambda^*)_{\lambda\in R^+}$ unde

$$L_\lambda^*(x) = \begin{cases} L_\lambda(x), & \|x\| \leqslant \lambda \\ 0, & \|x\| > \lambda \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$

$$L_\lambda(x) = \frac{1}{C_\lambda}(\lambda^2 - \|x\|^2)^p, \quad C_\lambda = \int_{\|x\|\leqslant\lambda} (\lambda^2 - \|x\|^2)^p \, dx, \quad p \in N.$$

Deoarece $L_\lambda^*(x) \geqslant 0$, $\int_{R^n} L_\lambda^*(x) \, dx = 1$, supp $L_\lambda^* = \{x, \; x \in R^n, \; \|x\| \leqslant \lambda\}$ urmînd demonstrația dată pentru ρ_ε obținem că $(L_\lambda^*)_{\lambda\in R^+}$ este o familie de șiruri reprezentativă Dirac, adică $\lim_{\lambda\to+0} L_\lambda^* = \delta$. Evident $L_\lambda^* \in K^{p-1}(R^n)$, dar spre deosebire de șirul $(L_i^*)_{i\in N}$ constituit din polinoame al căror grad crește odată cu rangul termenului, familia de șiruri $(L_\lambda^*)_{\lambda\in R^+}$ este constituită numai din polinoame de grad $2p$ însă cu suporturi compacte ce tind la zero odată cu λ.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 2

Produsul de convoluție

§ 1. Produsul de convoluție pentru funcții

1. Convoluția în spații L^p. Proprietăți generale

Datorită proprietăților sale produsul de convoluție constituie un instrument eficace de studiu în domeniul calculului operațional, a ecuațiilor integro-diferențiale precum și a unor mărimi fizice, mecanice și electrice.

Imposibilitatea definirii, în general, a produsului a două distribuții a condus la extinderea produsului de convoluție pentru funcții la distribuții, lărgind considerabil aria aplicațiilor teoretice și practice ale produsului de convoluție.

DEFINIȚIA 1. Fie f și g funcții complexe, local integrabile pe R^n. Funcția $f * g : X \to \Gamma$ astfel încît $(f * g)(x) = \int_{R^n} f(t)\, g(x - t)\, dt$ $\forall\ f\tau_x g^\vee \in L^1(R^n)$ se numește produsul de convoluție al funcțiilor $x \in X \subset R^n$ f și g.

PROPOZIȚIA 1. *Produsul de convoluție este comutativ.*

Într-adevăr, presupunînd că $\exists\,(f * g)(x_0)$ și efectuînd schimbarea de variabilă $y = x_0 - t$ obținem $(f * g)(x_0) = \int_{R^n} f(x_0 - y)\, g(y)\, dy =$ $= (g * f)(x_0)$, deoarece $J = (-1)^n$, deci $dt = |J|\, dy = dy$.

Dacă $X \subset R^n$ reprezintă mulțimea de existență a produsului $f * g$, atunci $g * f$ există și $f * g = g * f$.

Observație. Dacă produsul $f * g$ există pe $X \subset R^n$ îl vom defini pe tot spațiul R^n, considerînd $f * g = 0$, $x \in R^n \setminus X$.

PROPOZIȚIA 2. *Dacă există* $f * g$ *atunci* $\operatorname{supp} f * g \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}$.

Demonstrație. Fie $x_0 \in R^n$ un punct din domeniul de existență al produsului $f*g$. Deaoarece $\operatorname{supp} f\tau_{x_0} g^\vee \subset \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} \tau_{x_0} g^\vee$ și $\operatorname{supp} \tau_{x_0} g^\vee = x_0 + \operatorname{supp} g^\vee = x_0 - \operatorname{supp} g$ obținem:

$$(f * g)(x_0) = \int_{(\operatorname{supp} f) \cap (x_0 - \operatorname{supp} g)} f\tau_{x_0} g^\vee\, dt.$$

Dacă $x_0 \notin \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$ atunci $(\operatorname{supp} f) \cap (x_0 - \operatorname{supp} g) = \Phi$ și conform observației de mai înainte $(f * g)(x_0) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

În consecință, mulțimea pe care $f * g = 0$ conține complementarea lui $\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$, de unde rezultatul: $\operatorname{supp} f * g \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}$.

Deoarece produsul de convoluție nu există în general pentru orice funcții local integrabile f și g, vom da condiții de existență ale acestuia pentru unele clase de funcții.

PROPOZIȚIA 3. *Fie* $f, g \in L^1(R^n)$. *Atunci* $f * g$ *există a.p.t. și*

i) $$f * g \in L^1(R^n) \tag{1}$$

ii) $$\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 \tag{2}$$

iii) $$\int_{R^n} (f * g)(x)\, dx = \int_{R^n} f(u)\, du \cdot \int_{R^n} g(v)\, dv. \tag{3}$$

Demonstrație. Deoarece f și g sînt integrabile, în baza teoremei lui Fubini fg este integrabilă pe R^{2n} și avem:

$$\int_{R^n} f(u)\, du \cdot \int_{R^n} g(v)\, dv = \int_{R^{2n}} f(u)\, g(v)\, du\, dv.$$

Efectuînd schimbarea de variabile $u = t - x$, $v = x$, deoarece $J = \dfrac{D(u, v)}{D(t, x)} = 1$ obținem

$$\int_{R^{2n}} f(u)\, g(v)\, du\, dv = \int_{R^{2n}} f(t - x)\, g(x)\, dx\, dt.$$

Din existența acestei integrale și din teorema lui Fubini rezultă că există $h(t) = \int_{R^{2n}} f(t - x)\, g(x)\, dx$ aproape pentru orice t și

$$\int_{R^{2n}} f(t - x)\, g(x)\, dx\, dt = \int_{R^n} dt \int_{R^n} f(t - x)\, g(x)\, dx$$

deci $f * g \in L^1(R^n)$. Cum $\int_{R^n} f(t - x)\, g(x)\, dx = \int_{R^n} f(x)\, g(t - x)\, dx$ obținem

$$\int_{R^n} (f * g)(x)\, dx = \int_{R^n} f(u)\, du \cdot \int_{R^n} g(v)\, dv$$

adică relația (3).

Din această relație avem:

$$|(f * g)(x)| \leqslant \int_{R^n} |f(t)| \cdot |g(x - t)|\, dt = (|f| * |g|)(x)$$

de unde prin integrare și în baza relației (3) obținem:

$$\|f * g\|_1 \leqslant \int_{R^n} (|f| * |g|)(x)\, dx = \int_{R^n} |f(u)|\, du \cdot \int_{R^n} |g(v)|\, dv = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

Cu aceasta propoziția este complet demonstrată.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 1. Fie $f, g \in L^1(R^n)$ și $a, x \in R^n$. Dacă $E(x) = e^{i(a,x)}$ $(a, x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$, $i = \sqrt{-1}$ atunci

$$E(x)\,(f * g) = E(x)\,f * E(x)\,g. \tag{4}$$

Într-adevăr, deoarece $|E(x)| = 1$ și $f * g \in L^1(R^n)$ rezultă că funcțiile $E(f * g)$, Ef, $Eg \in L^1(R^n)$ și avem

$$E(x)\,(f * g)\,(x) = \int_{R^n} E(x) f(t)\, g(x-t)\,dt = \int_{R^n} e^{i(a,t)} f(t)\, e^{i(a,x-t)} g(x-t)\,dt =$$

$$= (Ef) * (Eg).$$

PROPOZIȚIA 4. *Fie* $f \in L^p(R^n)$, $g \in L^q(R^n)$, $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$. *Atunci produsul de convoluție* $f * g$ *există peste tot, este o funcție mărginită, continuă și* $|f * g|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

Demonstrație. Deoarece $g \in L^q(R^n)$, $\forall_{h \in R^n} \tau_h g^\vee \in L^q(R^n)$ și avem:

$$|(f * g)\,(x)| \leqslant \int_{R^n} |f(t)| \cdot |g(x-t)|\,dt = (|f| * |g|)\,(x).$$

Aplicînd inegalitatea lui Hölder obținem:

$$|(f * g)\,(x)| \leqslant (|f| * |g|)\,(x) \leqslant \|f(t)\|_p \cdot \|g(x-t)\|_q = \|f(t)\|_p \cdot \|g(t)\|_q. \tag{5}$$

Deci produsul de convoluție există $\forall_{x \in R^n}$ și este mărginit, de unde inegalitatea cerută în propoziție. Pentru a arăta continuitatea produsului de convoluție vom utiliza proprietatea că spațiul $C(\Omega)$ al funcțiilor continue cu suport compact inclus în compactul Ω este dens în spațiul $L^p(\Omega)$. Evident, este suficient să arătăm continuitatea în origine deoarece în acest caz produsul de convoluție va fi continuu în orice punct. Deoarece spațiul $C(\Omega)$ este dens în $L^p(\Omega)$ $\forall_{\varepsilon \in R^+}$ $\forall_{f^\vee \in L^p(\Omega)}$ $\exists_{F_\varepsilon \in C(\Omega)}$ $\|f^\vee - F_\varepsilon\|_p < \varepsilon$.

În consecință, $\forall_{h \in R^n}$ supp $\tau_h F_\varepsilon \subset \Omega$ avem $\|\tau_h f^\vee - \tau_h F_\varepsilon\|_p < \varepsilon$.

În baza definiției produsului de convoluție și inegalității lui Hölder putem scrie:

$$|(f * g)\,(h) - (f * g)\,(0)| \leqslant \|\tau_h f^\vee - \tau_0 f^\vee\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Pe de altă parte are loc evaluarea:

$$\|\tau_h f^\vee - \tau_0 f^\vee\|_p \leqslant \|\tau_h F_\varepsilon - F_\varepsilon\|_p + \|\tau_h f^\vee - \tau_h F_\varepsilon\|_p + \|f^\vee - F_\varepsilon\|_p \leqslant 2\varepsilon + \|\tau_h F_\varepsilon - F_\varepsilon\|_p.$$

Cum F_ε este continuă pe Ω, ea este uniform continuă pe Ω, deci

$$\forall_{\varepsilon \in R^+} \exists_{\eta_\varepsilon \in R^+} |h| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |F_\varepsilon(t-h) - F_\varepsilon(t)| < \varepsilon$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde $\|\tau_h F_\varepsilon - F_\varepsilon\|_p \leqslant (\text{măs. } \Omega)^{\frac{1}{p}} \sup_{t \in R^n} |F_\varepsilon(t-h) - F_\varepsilon(t)| \leqslant \varepsilon(\text{măs. } \Omega)^{\frac{1}{p}}$.

Ţinînd seamă de relaţiile precedente obţinem în definitiv

$$|(f * g)(h) - (f * g)(0)| \leqslant \|g\|_q [2\varepsilon + \varepsilon(\text{măs. } \Omega)^{\frac{1}{p}}]$$

adică $\lim_{h \to 0} (f * g)(h) = (f * g)(0)$ ceea ce atestă continuitatea produsului de convoluţie în origine.

COROLARUL 1. *Dacă* $f, g \in L^2(R^n)$ *atunci* $\forall_{x \in R^n}$ *convoluţia* $f * g$ *există este mărginită, continuă, distributivă şi*

$$\|f * g\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_2 \cdot \|g\|_2.$$

Într-adevăr, considerînd $p = q = 2$, în baza propoziţiei 4 cu excepţia distributivităţii avem rezultatul enunţat. Pentru a arăta distributivitatea, fie funcţiile $f, g, h \in L^2(R^n)$. Atunci $\forall_{\alpha, \beta \in \Gamma}$ avem $\alpha g + \beta h \in L^2(R^n)$ deci produsul $f * (\alpha g + \beta h)$ există şi avem:

$$f * (\alpha g + \beta h) = \int_{R^n} f(t)\,[\alpha g(x-t) + \beta h(x-t)]\,dt =$$

$$= \alpha \int_{R^n} f(t)\, g(x-t)\,dt + \beta \int_{R^n} f(t)\, h(x-t)\,dt = \alpha(f * g) + \beta(f * g)$$

adică ceea ce trebuie demonstrat.

COROLARUL 2. *Dacă* $f \in L^1(R^n)$ *iar* g *este mărginită pe* R^n, *atunci* $\forall_{x \in R^n}$ *convoluţia* $f * g$ *există, este mărginită, continuă şi*

$$\|f * g\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_{L^\infty}.$$

Acest rezultat se obţine din propoziţia 4 considerînd $p = 1$, $q = \infty$. Ca o generalizare a propoziţiei 3 relativ la relaţiile (1) şi (2) are loc:

PROPOZIŢIA 5. *Fie* $f \in L^1(R^n)$, $g \in L^p(R^n)$, $p \geqslant 1$. *Atunci* $\forall_{x \in R^n}$ *convoluţia* $f * g$ *există şi avem:*

i) $f * g \in L^p(R^n)$

ii) $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_p$.

Demonstraţie. În baza propoziţiei 3 este suficient să considerăm $p > 1$. Pentru a arăta existenţa produsului de convoluţie observăm că $|f(t)|^{\frac{1}{p}} |g(x-t)| \in L^p(R^n)$, $|f(t)|^{\frac{1}{q}} \in L^q(R^n)$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ şi aplicînd inegalitatea lui Hölder obţinem

$$|(f * g)(x)| \leqslant \int_{R^n} |f(t)|^{\frac{1}{p}} |g(x-t)| \cdot |f(t)|^{\frac{1}{q}}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{R^n} |f(t)| \cdot |g(x-t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{R^n} |f(t)|\,dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci $\forall_{x \in R^n}$, $f * g$ există și $|f * g|^p \leqslant \|f\|_1^{\frac{p}{q}} \cdot (|f| * |g|^p)$.

Prin integrarea acestei inegalități, deoarece $|f|$, $|g|^p \in L^1(R^n)$, în baza formulei (3) obținem:

$$\int_{R^n} |(f * g)(x)|^p \, dx \leqslant \|f\|_1^{\frac{p}{q}} \cdot \|f\|_1 \cdot \|g\|_p^p = \|f\|_1^p \cdot \|g\|_p^p$$

de unde

$$\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_p, \quad \text{adică } f * g \in L^p(R^n).$$

Cu aceasta propoziția este demonstrată. Menționăm că propoziția 4 se poate enunța sub o formă generală. Avem astfel:

PROPOZIȚIA 6. *Fie* $f \in L^p(R^n)$, $g \in L^q(R^n)$, $1 \leqslant p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geqslant 0$. *Atunci* $f * g$ *există a.p.t.*, $f * g \in L^r(R^n)$ *unde*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \quad \text{și} \quad \|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Această inegalitate constituie inegalitatea lui Young. Evident, pentru $r = \infty$ obținem propoziția 4, iar pentru $p = q = r = 1$ propoziția 3.

Pe lîngă cazurile de existență a produsului de convoluție date, mai menționăm următoarele:

a) f și g local integrabile pe R^n și una din ele are suport compact.

b) f și g local integrabile pe R și cu suporturile în $R_+ = [0, \infty)$.

În cazul b) $f * g$ este o funcție local integrabilă a.p.t.

și
$$(f * g)(x) = (\theta f * \theta g)(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \int_0^x f(t)\, g(x - t)\, dt, & x \geqslant 0 \end{cases} \tag{7}$$

unde θ reprezintă funcția lui Heaviside.

Într-adevăr, presupunînd de exemplu în cazul a) că f este cu suport compact, $\operatorname{supp} f = \Omega$, atunci existența produsului de convoluție rezultă din relația evidentă:

$$(f * g)(x) = \int_{R^n} f(t)\, g(x - t)\, dt = \int_\Omega f(t)\, g(x - t)\, dt < \infty.$$

În cazul b) deoarece $\operatorname{supp} f$, $\operatorname{supp} g \subset [0, \infty)$ avem $\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g} \subset [0, \infty)$, deci

$$(f * g)(x) = \int_0^\infty g(t)\, f(x - t)\, dt = -\int_x^{-\infty} f(u)\, g(x - u)\, du =$$

$$= \int_{-\infty}^x f(u)\, g(x - u)\, du = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \int_0^x f(u)\, g(x - u)\, du, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

deoarece $f(u) = 0$, $u \leqslant 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă funcţia f nu are suportul în R_+ atunci, de exemplu, $\operatorname{supp}(\theta * f) \not\subset R_+$ şi avem $(\theta * f)(x) = \int_0^{\infty} f(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$.

Exemplul 2. Fie funcţia complexă $Y_\lambda^{(\alpha)} : R \to \Gamma$ unde $\alpha \in R^+$, $\lambda \in \Gamma$ şi $Y_\lambda^{(\alpha)}(x) = \theta(x)\dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{\lambda x}$, $\Gamma(\alpha)$ fiind funcţia lui Euler de speţa a doua. Are loc relaţia:

$$\underset{\substack{\alpha,\beta\in R^+\\ \lambda\in\Gamma}}{\forall} Y_\lambda^{(\alpha)} * Y_\lambda^{(\beta)} = Y_\lambda^{(\alpha+\beta)}. \tag{8}$$

Conform cazului b), deoarece $Y_\lambda^{(\alpha)}$, $Y_\lambda^{(\beta)}$ au suporturile în R_+, produsul lor de convoluţie există şi avem:

$$(Y_\lambda^{(\alpha)} * Y_\lambda^{(\beta)})(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{\lambda x}\,dt, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Pentru $x \geqslant 0$, efectuînd substituţia $t = ux$ obţinem:

$$(Y_\lambda^{(\alpha)} * Y_\lambda^{(\beta)})(x) = \frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} e^{\lambda x} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1}\,du.$$

Notînd cu $B(\alpha, \beta)$ funcţia lui Euler de speţa întîia şi cum $B(\alpha, \beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$, în baza relaţiei precedente obţinem:

$$(Y_\lambda^{(\alpha)} * Y_\lambda^{(\beta)})(x) = \theta(x)\frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} e^{\lambda x} = Y_\lambda^{(\alpha+\beta)}(x), \underset{x\in R}{\forall}$$

În particular, dacă $\alpha = n \in N$, atunci deoarece $\Gamma(n) = (n-1)!$ formula obţinută anterior ne dă:

$$Y_\lambda^{(n)}(x) = \theta(x)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda x}$$

Notînd cu $f^{*n} = \underbrace{f * f * \ldots * f}_{n \text{ ori}}$, are loc formula:

$$Y_\lambda^{(n)}(x) = Y_\lambda^{*n}. \tag{9}$$

Într-adevăr pentru $x \geqslant 0$ avem

$$Y_\lambda^{*2}(x) = (Y_\lambda * Y_\lambda)(x) = \int_0^x e^{\lambda t} e^{\lambda(x-t)}\,dt = x\,e^{\lambda x} = Y_\lambda^{(2)}(x).$$

Scanned with OKEN Scanner

Admiţînd că $Y_\lambda^{*(n-1)}(x) = \dfrac{x^{n-2}}{(n-2)!} e^{\lambda x}$ pentru $x \geqslant 0$ obţinem :

$$Y_\lambda^{*n}(x) = (Y_\lambda^{*(n-1)} * Y_\lambda)(x) = \int_0^x e^{\lambda x} \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\, dt = e^{\lambda x} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

adică

$$\underset{x \in R}{\forall} Y_\lambda^{*n}(x) = \theta(x)\, e^{\lambda x} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = Y_\lambda^{(n)}$$

Pentru $\lambda = 0$, $Y_0 = \theta(x)$, deci în baza relaţiei (9) avem :

$$\theta^{*n}(x) = \theta(x) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{x_+^{n-1}}{(n-1)!} \tag{10}$$

deoarece $x_+ = x\theta(x)$.

DEFINIŢIA 2. Spaţiul vectorial (X, Γ) se numeşte algebră dacă avem definită aplicaţia $(x, y) \to x \circ y$ a lui $X \times X$ în X, satisfăcînd următoarele proprietăţi :

1° $\underset{x, y, z \in X}{\forall} (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, asociativitatea

2° $\underset{x, y, z \in X}{\forall} x \circ (y + z) = x \circ y + x \circ z$ distributivitatea faţă de adunare
$(y + z) \circ x = y \circ x + z \circ x$

3° $\underset{\lambda, \mu \in \Gamma}{\forall} \underset{x, y \in X}{\forall} (\lambda x) \circ (\mu y) = (\lambda \mu)(x \circ y)$

Dacă $\underset{x, y \in X}{\forall} x \circ y = y \circ x$ atunci spunem că algebra $(X, \Gamma, 0)$ este comutativă.

DEFINIŢIA 3. Spunem că algebra $(X, \Gamma, 0)$ este cu unitate dacă $\underset{u \in X}{\exists} \underset{x \in X}{\forall}$ avem $u \circ x = x \circ u = x$.

DEFINIŢIA 4. Spunem că spaţiul normat $(X, \Gamma, \|\cdot\|)$ este o algebră normată dacă este o algebră şi $\underset{x, y \in X}{\forall}$ avem

$$\|x \circ y\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$$

În particular, dacă X este un spaţiu Banach, atunci algebra X se va numi algebră Banach.

PROPOZIŢIA 7. *Spaţiul $L^1(R^n)$ înzestrat cu produsul de convoluţie este o algebră Banach comutativă fără element unitate.*

Demonstraţie. Conform propoziţiei 3, $\underset{f, g \in L^1(R^n)}{\forall}$ avem

$$f * g \in L^1(R^n) \quad \text{şi} \quad \|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

Deoarece produsul de convoluţie este comutativ şi distributivitatea este evidentă, vom demonstra numai asociativitatea. Fie $f, g, h \in L^1(R^n)$. Atunci funcţia $(t, x, u) \to f(t)\, g(x - t)\, h(u - x)$ este integrabilă pe

Scanned with OKEN Scanner

R^{3n}. Pe baza teoremei lui Fubini funcția : $\Phi(u)=\int_{R^{2n}} f(t)g(x-t)h(u-x)\,dx\,dt$ există aproape pentru toți u și putem scrie :

$$\int_{R^n}\left[\int_{R^n} f(t)\,g(x-t)\,dt\right]h(u-x)\,dx=(f*g)*h=$$

$$=\int_{R^n} f(t)\left[\int_{R^n} g(x-t)\,h(u-x)\,dx\right]dt=\int_{R^n} f(t)\left[\int_{R^n} g(x)\,h(u-t-x)\,dx\right]dt=$$

$$=f(t)*(g*h)\,(u-t)=f*(g*h).$$

Deci $L^1(R^n)$ în raport cu produsul de convoluție este o algebră comutativă. Cum $L^1(R^n)$ este un spațiu Banach iar $\|f*g\|_1\leqslant\|f\|_1\cdot\|g\|_1$ rezultă că $L^1(R^n)$ este o algebră Banach. Pentru a arăta că această algebră este fără unitate, observăm că în baza corolarului 2, dacă ar exista elementul unitate $u\in L^1(R^n)$ atunci pentru orice $f\in L^1(R^n)$, mărginită, $f=u*f$ ar fi o funcție continuă, ceea ce este imposibil.

Algebra $L^1(R^n)$ în raport cu produsul de convoluție o vom numi algebră de convoluție.

O aplicație importantă a algebrei de convoluție $L^1(R)$ are loc în calculul probabilităților în legătură cu studiul densității de probabilitate a sumei a două variabile aleatoare independente. Astfel dacă f și g reprezintă densitățile de probabilitate ale variabilelor aleatoare independente X și Y, atunci densitatea de probabilitate a sumei $X+Y$ a celor două variabile aleatoare va fi $f*g$. În particular, dacă densitățile f și g corespund la două legi de repartiție de același tip și densitatea $f*g$ corespunzătoare sumei celor două variabile aleatoare este de același tip, atunci legea respectivă de repartiție este stabilă. Vom ilustra proprietatea de stabilitate a legii normale de probabilitate.

Exemplul 3. Fie f_{σ_1} și f_{σ_2} densitățile de probabilitate corespunzătoare a două variabile aleatoare independente supuse legii normale de probabilitate, anume :

$$f_{\sigma_1}(x)=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}},\qquad f_{\sigma_2}(x)=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}}\tag{11}$$

unde $\sigma_1,\ \sigma_2>0$ reprezintă abaterile medii patratice ale celor două variabile aleatoare.

Are loc formula :

$$(f_{\sigma_1}*f_{\sigma_2})\,(x)=f_{\sigma}(x),\qquad \sigma=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\,.\tag{12}$$

Într-adevăr, deoarece $\int_R e^{-u^2}\,du=\sqrt{\pi}$ avem :

$$\int_R f_{\sigma_1}\,dx=\int_R f_{\sigma_2}\,dx=1,\quad\text{deci}\quad f_{\sigma_1},f_{\sigma_2}\in L^1(R)$$

și în consecință $f_{\sigma_1}*f_{\sigma_2}\in L^1(R)$.

Scanned with OKEN Scanner

În baza definiției produsului de convoluție avem

$$(f_{\sigma_1} * f_{\sigma_2})(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right) \times$$

$$\times \int_R \exp\left[-\frac{1}{2}\,\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(t-\frac{x\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2\right] dt.$$

Notînd $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ și făcînd substituția :

$$u = \frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2}\left(t-\frac{x\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$$ obținem relația (12).

Cum σ_1^2, σ_2^2, σ^2 reprezintă dispersiile variabilelor aleatoare X, Y, $X+Y$ din $\sigma^2 = \sigma_1^2+\sigma_2^2$ deducem că dispersia sumei este egală cu suma dispersiilor variabilelor aleatoare.

Dacă f_{σ_1}, f_{σ_2}, f_{σ_3} reprezintă densitățile corespunzătoare variabilelor X, Y, Z atunci deoarece $L^1(R)$ formează o algebră de convoluție comutativă, densitatea de probabilitate f_σ corespunzătoare sumei $X+Y+Z$, va avea expresia :

$$f_\sigma(x) = f_{\sigma_1} * f_{\sigma_2} * f_{\sigma_3}, \quad \text{unde} \quad \sigma = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2}.$$

Exemplul 4. Fie $f_a : R \to C$ o funcție complexă definită prin relația :

$$f_a(x) = \frac{1}{x-a}, \quad a \in C \setminus R \text{ (număr pur complex).}$$

Dacă $a, b \in C \setminus R$ atunci avem :

$$f_a * f_b = \begin{cases} 0, & (\operatorname{Im} a)(\operatorname{Im} b) < 0 \\ 2\pi i f_{a+b}, & (\operatorname{Im} a) > 0, \quad (\operatorname{Im} b) > 0 \\ -2\pi i f_{a+b}, & \operatorname{Im} a < 0, \quad \operatorname{Im} b < 0 \end{cases} \tag{13}$$

Demonstrație. Observăm că $f_a, f_b \notin L^1(R)$ dar $f_a, f_b \in L^2(R)$ și în consecință $f_a * f_b$ există conform corolarului 1. Aplicînd teorema reziduurilor obținem :

$$(f_a * f_b)(x) = 2\pi i(\operatorname{Rez}(t_1) + \operatorname{Rez}(t_2)) \tag{14}$$

unde t_1, t_2 sînt polii din semiplanul pozitiv al funcției complexe $\frac{1}{(t-a)(x-t-b)}$. Polii acestei funcții sînt $t_1' = a$, $t_2' = x-b$ iar reziduurile corespunzătoare au expresiile :

$$\operatorname{Rez}(t_1') = \frac{1}{x-a-b}, \quad \operatorname{Rez}(t_2') = -\frac{1}{x-a-b}. \tag{15}$$

Scanned with OKEN Scanner

Astfel dacă $\mathrm{Im}a>0$, $\mathrm{Im}b>0$ atunci în semiplanul pozitiv considerat partea de deasupra axei reale se va găsi numai polul $t_1'=a$.

În consecință $t_1=t_1'=a$ și în baza formulelor (14) și (15) obținem:

$$(f_a * f_b)(x) = 2\pi i \operatorname{Rez}(t_1) = \frac{2\pi i}{x-a-b} = 2\pi i f_{a+b}.$$

Procedînd analog, obținem relația (13). Această relație permite deducerea proprietății de stabilitate a legii de probabilitate a lui Cauchy a cărei densitate este dată de funcția:

$$F_a(x) = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}, \quad a \in R^+, \quad x \in R. \tag{16}$$

Dacă $a, b \in R^+$ atunci:

$$F_a * F_b = F_{a+b}. \tag{17}$$

Într-adevăr, deoarece $F_a = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x-ai} - \frac{1}{x+ai}\right)$ și funcțiile $\frac{1}{x-ai}, \frac{1}{x+ai} \in L^2(R)$, în baza corolarului 1, privind existența și distributivitatea produsului de convoluție a funcțiilor din L^2, obținem relația (17). Remarcăm că funcția F_a reprezintă o familie de șiruri reprezentative Dirac deoarece pentru $a \to +0$ avem în $K'(R)$, $\lim\limits_{a\to+0} F_a = \delta_0$.

2. Regularizarea și aproximarea funcțiilor cu ajutorul produsului de convoluție

Produsul de convoluție asociat cu șirurile reprezentative Dirac constituie un mijloc eficient de studiu și de aproximare a diferitelor clase de funcții. În acest scop se consideră șiruri Dirac îndeplinind anumite condiții, numite șiruri regularizate, ale căror proprietăți determină calitățile funcțiilor regularizate.

Definiția 1. Spunem că șirul de funcții $(\delta_i)_{i\in N} \in K(R^n)$ este un șir regularizant, dacă îndeplinește următoarele condiții:

1°. $\forall\limits_{x\in R^n} \quad \delta_i(x) \geqslant 0$

2°. $\forall\limits_{i\in N} \int_{R^n} \delta_i(x)\,dx = 1$

3°. $\forall\limits_{i\in N} \quad \operatorname{supp}\delta_i \subset \overline{U}_{\varepsilon_i}, \quad \lim\limits_i \varepsilon_i = 0$

unde $\overline{U}_{\varepsilon_i}$ este sfera închisă cu centrul în origine și rază ε_i. Structura șirurilor regularizante rezultă din:

Scanned with OKEN Scanner

PROPOZIȚIA 1. *Dacă* $(\delta_i)_{i\in N}$ *este un șir regularizant atunci* $\lim_i \delta_i = \delta_0$.

Demonstrație. $\forall_{\varphi\in K(R^n)}$ avem :

$$|(\delta_i, \varphi) - \varphi(0)| \leqslant \int_{\overline{U}_{\varepsilon_i}} \delta_i(x)\,|\varphi(x) - \varphi(0)|\,dx \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant\varepsilon_i} |\varphi(x) - \varphi(0)|.$$

În baza continuității uniforme a funcției $\varphi \in K(R^n)$ și deoarece cînd $i\to\infty$ atunci $\varepsilon_i \to 0$, avem $\sup_{\|x\|\leqslant\varepsilon_i} |\varphi(x)-\varphi(0)| \to 0$, deci $\lim_i (\delta_i, \varphi)=\varphi(0)=(\delta_0, \varphi)$, adică $\lim_i \delta_i = \delta_0$. Conform acestei propoziții putem spune că șirurile regularizante sînt șiruri reprezentative Dirac de tip pozitiv. Astfel funcțiile $\rho_\varepsilon(\varepsilon > 0)$ definite prin relația (7), I.4.2. reprezintă o familie regularizantă de șiruri.

În ce privește șirul reprezentativ Dirac de tip Landau $(L_i^*)_{i\in N}$ dat în exemplul 4, I.5., acesta nu constituie un șir regularizant deoarece nu este de clasa $C^\infty(R^n)$ și condiția 3° a șirurilor regularizante privind suporturile nu este îndeplinită. Cu toate acestea el permite o aproximare convenabilă a funcțiilor prin polinoame după cum vom arăta mai jos.

Fie o mulțime mărginită $\Omega \subset R^n$. Numim vecinătate de ordinul ε $(\varepsilon > 0)$ a mulțimii Ω mulțimea

$$\Omega_\varepsilon = \{x;\, x \in R^n,\ x_0 \in \Omega,\ \|x - x_0\| \leqslant \varepsilon\}.$$

Observăm că mulțimea Ω_ε este închisă, mărginită și conține mulțimea Ω. Prin diametrul mulțimii Ω înțelegem numărul $D = \operatorname{diam}\Omega = \sup_{x,\,y\in\Omega} d(x, y)$.

PROPOZIȚIA 2. *Fie* $f \in C(\Omega)$ *o funcție continuă definită pe* R^n *cu* $\operatorname{supp} f = \Omega$ *compact și* $\rho_\varepsilon(\varepsilon > 0)$ *familia regularizantă definită prin* (7), I.4.2. *Atunci* $f_\varepsilon = f * \rho_\varepsilon \in C^\infty(R^n)$, $\operatorname{supp} f_\varepsilon \subset \Omega_\varepsilon$ *și* $f_\varepsilon \overset{u}{\Rightarrow} f$ *în* R^n *pentru* $\varepsilon \to 0$.

Demonstrație. Deoarece ρ_ε are suportul compact funcția f_ε există și avem :

$$f_\varepsilon(x) = (f * \rho_\varepsilon)(x) = \int_{R^n} f(t)\,\rho_\varepsilon(x - t)\,dt = \int_{\|x-t\|\leqslant\varepsilon} f(t)\,\rho_\varepsilon(x - t)\,dt$$

unde $t \in \operatorname{supp} f$ și $x - t \in \operatorname{supp}\rho_\varepsilon$. În consecință pentru $\|x - t\| > \varepsilon$, $f_\varepsilon = 0$ deci $\operatorname{supp} f_\varepsilon \subset \Omega_\varepsilon = \{x;\, x \in R^n,\, x_0 \in \Omega,\, \|x - x_0\| \leqslant \varepsilon\}$. Cum $f(t)\rho_\varepsilon(x - t)$ este indefinit derivabilă în raport cu x și domeniul de integrare mărginit, aplicînd derivarea sub semnul integralei obținem :

$$D^\alpha f_\varepsilon(x) = \int_{\|x-t\|<\varepsilon} f(t)\,D^\alpha\rho_\varepsilon(x - t)\,dt = (f * D^\alpha\rho_\varepsilon)(x)$$

deci $f_\varepsilon \in C^\infty(R^n)$. Pentru a arăta că f_ε converge uniform către f observăm că în baza continuității uniforme a funcției f, $\forall_{\varepsilon\in R^+}\ \exists_{\eta_\varepsilon\in R^+} \|x - t\| < \varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow |f(x) - f(t)| < \eta_\varepsilon$.

Scanned with OKEN Scanner

În consecință, deoarece $\int_{R^n} \rho_\varepsilon(t)\,dt = \int_{\|t\|\leqslant\varepsilon} \rho_\varepsilon(t)\,dt$ avem

$$f(x) - f_\varepsilon(x) = \int_{\|x-t\|\leqslant\varepsilon} \rho_\varepsilon(x-t)\,[f(x) - f(t)]\,dt$$

de unde

$$|f(x) - f_\varepsilon(x)| \leqslant \sup_{\|x-t\|\leqslant\varepsilon} |f(x) - f(t)| \int_{\|x-t\|\leqslant\varepsilon} \rho_\varepsilon(x-t)\,dt < \eta_\varepsilon$$

adică $f_\varepsilon \overset{u}{\Rightarrow} f$ pe orice compact din R^n.

Funcția f_ε construită cu ajutorul familiei de șiruri regularizante ρ_ε constituie regularizata funcției f.

Evident pentru fiecare valoare dată $\varepsilon > 0$, regularizata f_ε reprezintă o aproximare a funcției f.

Dacă funcția f nu are suportul compact atunci putem enunța:

PROPOZIȚIA 3. *Fie* $f \in L^1(R^n)$ și $\Omega \subset R^n$ *un compact pe care funcția* f *este continuă. Dacă* $(\delta_i)_{i\in N}$ *este un șir regularizant, atunci* $f_i = f * \delta_i \overset{u}{\Rightarrow} f$ *pe compactul* Ω.

Demonstrație. Deoarece $\int_{R^n} \delta_i(t)\,dt = 1$ avem

$$|f_i(x) - f(x)| \leqslant \int_{R^n} \delta_i(t)\,|f(x-t) - f(x)|\,dt$$

unde

$$f_i(x) = (f * \delta_i)(x) = \int_{R^n} f(x-t)\,\delta_i(t)\,dt.$$

Funcția f fiind continuă pe compactul Ω este și uniform continuă deci $\underset{\varepsilon_0\in R^+}{\forall}\ \underset{\eta_{\varepsilon_0}\in R^+}{\exists}\ \|t\| < \eta_{\varepsilon_0} \Rightarrow |f(x-t) - f(x)| < \varepsilon_0$, $\underset{x\in\Omega}{\forall}$. Cum supp $\delta_i \subset \overline{U}_{\varepsilon_i}$ și $\varepsilon_i \to 0$ pentru $i \to \infty$ rezultă că există $i_0 \in N$ astfel încît pentru $i > i_0$, $\varepsilon_i < \eta_{\varepsilon_0}$, deci $|f_i(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon_0$, $\underset{x\in\Omega}{\forall}$, $i > i_0$. Cu aceasta propoziția este demonstrată.

O altă proprietate regularizantă a produsului de convoluție relativ la funcțiile derivabile și cu suport compact este dată de propoziția 4 care completează propoziția 2.

PROPOZIȚIA 4. *Fie* $f \in C^k(R^n)$, supp f *compact,* $f_\varepsilon = f * \rho_\varepsilon$. *Atunci pentru* $|p| \leqslant k$, $D^p f_\varepsilon \overset{u}{\Rightarrow} D^p f$.

Demonstrație. Deoarece $f_\varepsilon(x) = \int_{R^n} \rho_\varepsilon(t) f(x-t)dt$ și $\rho_\varepsilon(t) f(x-t) \in C^k(R^n)$ în raport cu x iar integrala se efectuează pe un domeniu mărginit, derivînd sub semnul integralei, obținem:

$$D^p f_\varepsilon(x) = \int_{R^n} \rho_\varepsilon(t)\,D^p f(x-t)\,dt = (\rho_\varepsilon * D^p f)(x).$$

Scanned with OKEN Scanner

În baza propoziției 2, deoarece $D^p f$ este continuă, avem

$$D^p f_\varepsilon \overset{u}{\Rightarrow} D^p f \text{ pe orice compact din } R^n.$$

Cu ajutorul acestor proprietăți regularizante ale produsului de convoluție putem aproxima funcții date și totodată construi funcții de clasa $C^\infty(R^n)$ cu anumite proprietăți pe mulțimi date din R^n. Avem astfel :

PROPOZIȚIA 5. *Fie domeniul* $\Omega \subset R^n$ *și* $\varepsilon > 0$. *Atunci există funcția* $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(R^n)$ *cu proprietățile* :

$$0 \leqslant \varphi_\varepsilon \leqslant 1, \quad \varphi_\varepsilon = 1, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad \varphi_\varepsilon = 0, \quad x \notin \Omega_{3\varepsilon}.$$

Demonstrație. Fie $\chi_{\Omega_{2\varepsilon}}$ funcția caracteristică corespunzătoare mulțimii $\Omega_{2\varepsilon}$ și funcția :

$$\varphi_\varepsilon(x) = (\chi_{\Omega_{2\varepsilon}} * \rho_\varepsilon)(x) = \int_{\Omega_{2\varepsilon}} \rho_\varepsilon(x - t)\, dt.$$

De aici rezultă

$$0 \leqslant \varphi_\varepsilon \leqslant \int_{R^n} \rho_\varepsilon(x - t)\, dt = \int_{R^n} \rho_\varepsilon(u)\, du = 1$$

și pe baza regulii de derivare sub semnul integrală, avem $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(R^n)$.

De asemenea putem scrie :

$$\varphi_\varepsilon = \int_{\|t-x\| \leqslant \varepsilon} \chi_{\Omega_{2\varepsilon}}(t)\, \rho_\varepsilon(x-t)\, dt = \begin{cases} \int_{\|t-x\| \leqslant \varepsilon} \rho_\varepsilon(x-t)\, dt = \int_{R^n} \rho_\varepsilon(u)\, du = 1, & x \in \Omega_\varepsilon \\ 0, & x \notin \Omega_{3\varepsilon} \end{cases}$$

Aproximarea prin polinoame. Teorema lui Weierstrass

Pentru aproximarea unei funcții continue pe un compact vom considera șirul reprezentativ Dirac de tip Landau $(L_i^*)_{i \in N}$ definit în exemplul 4 din I.5.

PROPOZIȚIA 6. *Fie* f *o funcție continuă pe compactul* $\Omega \subset R^n$ *nulă în afara lui și* $(L_i^*)_{i \in N}$ *șirul Landau. Atunci* $f_i = f * L_i^* \overset{u}{\Rightarrow} f$ *pe* Ω, $f_i(x) = (f * L_i^*)(x) = \int_\Omega L_i(x - t) f(t)\, dt$, *pentru* $\lambda \geqslant \operatorname{diam} \Omega$ *și*

$$\operatorname{supp} f_i = \Omega_\lambda = \{x \in R^n,\ t \in \Omega,\ \|x - t\| \leqslant \lambda\}.$$

Demonstrație. Deoarece $\operatorname{supp} L_i^* = \{x;\ x \in R^n, \|x\| \leqslant \lambda\}$ și $f_i = f * L_i^*$ avem $\operatorname{supp} f_i = \{x;\ x \in R^n, t \in \Omega, \|x - t\| \leqslant \lambda\}$ deci funcția f_i depinde de compactul $\Omega = \operatorname{supp} f$ și de parametrul λ al șirului Landau.

Considerînd pe lîngă $t \in \Omega$ și $x \in \Omega$ atunci $x - t \in \overline{U}_D$ unde $D = \operatorname{diam} \Omega = \sup_{x,t \in \Omega} d(x, t)$ și $\overline{U}_D$ sfera închisă de rază D și cu centrul în origine.

Deci pentru $\lambda \geqslant D$ avem $x, t \in \bar{U}_D$ şi în consecinţă $L_i^*(x-t) = L_i(x-t)$, de unde relaţia :

$$f_i(x) = \int_\Omega L_i(x-t) f(t)\, dt = \frac{1}{C_i} \int_\Omega (\lambda^2 - \|x-t\|^2)^i f(t)\, dt.$$

Efectuînd integrarea în raport cu variabila t vom obţine pentru $f_i(x)$ un polinom de grad $\leqslant 2i$.

În acest fel şirul $(f_i)_{i \in N}$ reprezintă un şir aproximant de polinoame pentru funcţia continuă pe compactul Ω. Într-adevăr avem :

$$|f_i(x) - f(x)| \leqslant \int_{\|t\| \leqslant \lambda} L_i(t)\, |f(x-t) - f(x)|\, dt =$$

$$= \frac{1}{C_i} \int_{\|t\| \leqslant \lambda} (\lambda^2 - \|t\|^2)^i\, |f(x-t) - f(x)|\, dt.$$

Deoarece f este continuă pe Ω, este şi uniform continuă, deci

$$\underset{\varepsilon \in R^+}{\forall} \underset{\eta_\varepsilon \in R^+}{\exists} \|t\| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x-t) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dacă $\lambda \leqslant \eta_\varepsilon$ atunci

$$\underset{x \in \Omega}{\forall} |f_i(x) - f(x)| \leqslant \int_{\|t\| \leqslant \lambda} L_i(t)\, dt = \varepsilon \quad \text{deci} \quad f_i \overset{u}{\Rightarrow} f \text{ pe } \Omega.$$

În cazul cînd $\lambda > \eta_\varepsilon$ avem

$$|f_i(x) - f(x)| \leqslant \int_{\|t\| < \eta_\varepsilon} L_i(t)\, |f(x-t) - f(x)|\, dt +$$

$$+ \int_{\eta_\varepsilon \leqslant \|t\| \leqslant \lambda} L_i(t)\, |f(x-t) - f(x)|\, dt \leqslant \varepsilon + \frac{M}{C_i} \int_{\eta_\varepsilon < \|t\| < \lambda} (\lambda^2 - \|t\|^2)^i\, dt,$$

$$M = \sup_{\substack{t \in \bar{U}_\lambda \\ x \in \Omega}} |f(x-t) - f(x)|,$$

dar

$$\int_{\eta_\varepsilon \leqslant \|t\| \leqslant \lambda} (\lambda^2 - \|t\|^2)^i\, dt \leqslant A(\lambda^2 - \eta_\varepsilon^2)^i, \quad A = \int_{\eta_\varepsilon < \|t\| < \lambda} dt$$

şi

$$C_i \geqslant \int_{\|t\| \leqslant \frac{1}{2}\eta_\varepsilon} (\lambda^2 - \|t\|^2)^i\, dt \geqslant B\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\eta_\varepsilon^2\right)^i, \quad B = \int_{\|t\| < \frac{1}{2}\eta_\varepsilon} dt$$

Scanned with OKEN Scanner

În consecință, $|f_i(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + M \frac{A}{B} r^i$, $r = \frac{\lambda^2 - \eta_\varepsilon^2}{\lambda^2 - \frac{1}{4}\eta_\varepsilon^2} < 1$. Deoarece ε este arbitrar și $r^i \to 0$ pentru $i \to \infty$, atunci $\underset{h \in R^+}{\forall} \underset{i_0 \in N}{\exists} i > i_0 \Rightarrow$ $\Rightarrow f_i \overset{u}{\Rightarrow} f$ pe compactul Ω. Cu aceasta propoziția este demonstrată.

Deci pentru funcția continuă f pe compactul $\Omega \subset R^n$, $\underset{\varepsilon \in R^+}{\forall}$ există polinomul f_i astfel încît $|f_i(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\underset{x \in \Omega}{\forall}$. Aceasta exprimă chiar teorema lui Weierstrass de aproximare prin polinoame a funcțiilor continue pe un compact.

Astfel de exemplu dacă funcția f este continuă pe compactul $\Omega = [a, b] \subset R$ și este nulă în afara lui, atunci, deoarece $D = \operatorname{diam}[a, b] = b - a$, avem

$$\overline{U}_D = [a - b,\ b - a] = \{x \in R,\ |x| \leqslant b - a\},$$

deci pentru $\lambda \geqslant b - a$ obținem polinomul de aproximare

$$f_i(x) = (f * L_i^*)(x) = \frac{1}{C_i} \int_a^b [\lambda^2 - (x - t)^2]^i f(t)\, dt,$$

$$x \in [a, b], \quad C_i = \int_{-\lambda}^{\lambda} (\lambda^2 - x^2)^i\, dx.$$

Formula lui Cauchy și formula lui Taylor cu restul sub formă integrală

Produsul de convoluție este strîns legat și de rezolvarea problemei Cauchy a ecuațiilor diferențiale cu condiții inițiale nule ilustrată de formula lui Cauchy.

PROPOZIȚIA 7. *Fie $f \in C(R)$, $x_0 \in R$ și ecuația diferențială $y^{(n)} = f(x)$ cu condițiile inițiale $y^{(k)}(x_0) = 0$ $(k = 0, 1, 2 \ldots, n-1)$. Atunci soluția problemei Cauchy este dată de formula:*

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x - t)^{n-1}}{(n - 1)!} f(t)\, dt. \tag{1}$$

Pentru $x > x_0$ avem

$$y(x) = \frac{x^{n-1}}{(n - 1)!} \tau_{x_0} \theta * f \tau_{x_0} \theta. \tag{1'}$$

Demonstrație. Observăm că soluția problemei Cauchy cu condiții inițiale nule pentru $n = 2$, este dată de funcția:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} d\xi \int_{x_0}^{\xi} f(t)\, dt$$

Scanned with OKEN Scanner

care pentru $x > x_0$ se poate interpreta ca o integrală dublă extinsă la domeniul

$$D = \{(\xi, t) \mid \xi \in [x_0, x],\ t \in [x_0, \xi]\} \quad \text{(fig. 2)}$$

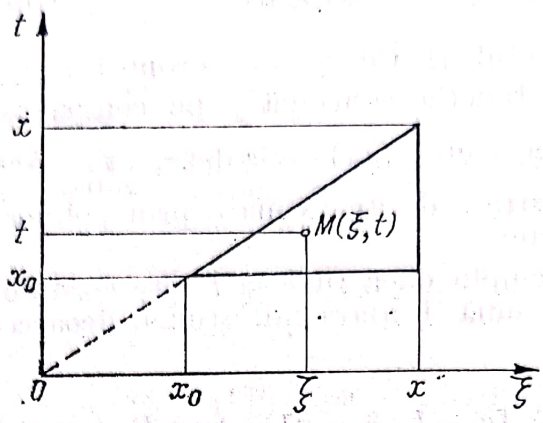

Fig. 2

În consecinţă putem scrie $y(x) = \iint_D f(t)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \int_t^x \mathrm{d}\xi =$

$= \int_{x_0}^{x} (x - t) f(t)\,\mathrm{d}t$, care observăm că este adevărată şi pentru $x < x_0$. Considerînd acum $n = 3$, obţinem :

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}\xi_1 \int_{x_0}^{\xi_1} \mathrm{d}\xi_2 \int_{x_0}^{\xi_2} f(\xi_3)\,\mathrm{d}\xi_3 = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}\xi_1 \int_{x_0}^{\xi_1} (\xi_1 - t) f(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \iint_D (\xi_1 - t) f(t)\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \int_t^x (\xi_1 - t)\,\mathrm{d}\xi_1 = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^2}{2!} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Aplicînd metoda inducţiei complete vom admite că soluţia problemei Cauchy cu condiţii iniţiale nule, pentru $n - 1$, este $y(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} f(t)\,\mathrm{d}t$. În acest fel soluţia problemei Cauchy pentru $x > x_0$ a ecuaţiei $y^{(n)} = f(x)$ va fi :

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}\xi_1 \int_{x_0}^{\xi_1} \mathrm{d}\xi_2 \int_{x_0}^{\xi_2} \mathrm{d}\xi_3 \ldots \int_{x_0}^{\xi_{n-1}} f(\xi_n)\,\mathrm{d}\xi_n = \int_{E_n} f(\xi_n)\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 \ldots \mathrm{d}\xi_n =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}\xi_1 \int_{x_0}^{\xi_1} \frac{(\xi_1 - t)^{n-2}}{(n-2)!} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n-2)!} \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \int_t^x (\xi_1 - t)^{n-2}\,\mathrm{d}\xi_1 =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t$$

unde $E_n = \{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \mid \xi_i \in [x_0, \xi_{i-1}]\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seamă de formula (7) II 1.1. și considerînd $x > x_0$, formula lui Cauchy obținută se poate scrie sub forma:

$$y(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \tau_{x_0} 0 * f \tau_{x_0} 0, \quad x > x_0.$$

În particular dacă $x_0 = 0$ și $x > 0$ atunci în baza formulei (10) soluția ecuației $y^{(n)} = f(x)$, $y^{(k)}(0) = 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ va fi:

$$y(x) = 0^{*n} * 0f, \quad x > 0, \tag{2}$$

0 fiind funcția lui Heaviside

Cu ajutorul formulei lui Cauchy putem obține formula lui Taylor cu restul sub formă integrală.

PROPOZIȚIA 8. *Fie* $f \in C^{n+1}(R)$ *și* $a \in R$. *Atunci* $\underset{x \in R}{\forall}$ *avem*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + R_n, \quad R_n = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Demonstrație. Considerăm funcția:

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}.$$

Observăm că $g \in C^{n+1}(R)$ și $g^{(k)}(a) = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$; $g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$. Notînd $f^{(n+1)}(x) = F(x)$, deoarece $F(x)$ este continuă pe R, avem $g^{(n+1)}(x) = F(x)$, $g^{(k)}(a) = 0$, $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Conform formulei lui Cauchy $g(x)$ este soluția acestei ecuații diferențiale, deci

$$g(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

adică $f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + R_n$, $R_n = g(x)$ fiind restul sub formă integrală din formula lui Taylor.

Notînd $M = \sup_{t \in [a, x]} |f^{(n+1)}(t)|$, deoarece funcția $f^{(n+1)}$ este continuă pe $[a, x]$, deci mărginită, vom obține pentru restul R_n evaluarea:

$$|R_n| \leqslant \sup_{t \in [a, x]} |f^{(n+1)}(t)| \cdot \left| \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, dt \right| = M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Din expresia restului R_n se obține și restul sub forma lui Lagrange. Într-adevăr, avem pentru $x > a$:

$$R_n \leqslant \frac{1}{n!} \sup_{t \in [a, x]} f^{(n+1)}(t) \cdot \int_a^x (x-t)^n\, dt = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a, x]} f^{(n+1)}(t)$$

$$R_n \geqslant \frac{1}{n!} \inf_{t \in [a, x]} f^{(n+1)}(t) \cdot \int_a^x (x-t)^n\, dt = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \inf_{t \in [a, x]} f^{(n+1)}(t)$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$R_n = A\,\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)\,!}\,; \quad A \in [\inf_{[a,\,x]} f^{(n+1)}(t),\ \sup_{[a,\,x]} f^{(n+1)}(t)].$$

Cum $f^{(n+1)}(t)$ este continuă pe $[a, x]$ avem $A = f^{(n+1)}(c)$, $c \in (a, x)$, deci $R_n = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)\,!} \cdot f^{(n+1)}(c)$, care reprezintă restul sub forma lui Lagrange

Analog, presupunînd $x < a$ vom obține același rezultat.

3. Algebra de convoluție $C(R_+)$

Conform formulei (7) II.1.1 dacă f și g sînt funcții local integrabile și au suporturile în $R_+ = [0, \infty)$, atunci produsul lor de convoluție există a.p.t. și avem:

$$(f * g)(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \int_0^x f(t)\, g(x-t)\, dt, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Pentru $x \geqslant 0$ vom nota:

$$(f \circledast g)(x) = \int_0^x f(t)\, g(x-t)\, dt \tag{1}$$

care se va numi produs de convoluție în R_+ sau încă convoluție semi-linie. Acest tip de produs de convoluție are o deosebită importanță în calculul operațional și apare în probleme la limită. Astfel, de exemplu, se arată simplu pe baza metodei variației constantei lui Lagrange că soluția ecuației oscilatorului liniar $y'' + \omega^2 y = f(x)$ pentru $x > 0$ și condiții inițiale nule $(y(0) = y'(0) = 0)$ este

$$y(x) = \frac{1}{\omega}\int_0^x f(t) \sin \omega(x-t)\, dt = \frac{1}{\omega} f \circledast \sin \omega x, \quad x > 0,$$

f fiind funcție continuă pe R_+.

În cele ce urmează vom nota cu $C(R_+)$ mulțimea funcțiilor complexe definite și continue pe R_+. Dacă $f, g \in C(R_+)$ atunci produsul lor de convoluție $f \circledast g$ pe R_+ există $\forall\, x \in R_+$ și este o funcție continuă, deci $f \circledast g \in C(R_+)$.

Astfel dacă $\theta_1(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ și $\theta_2 = 1$, $x \geqslant 0$ avem $\theta_1 \notin C(R_+)$ deoarece θ_1 nu este continuă la dreapta în origine dar $\theta_2 \in C(R_+)$.

Scanned with OKEN Scanner

Legătura dintre cele două tipuri de convoluții „$*$” și „$\circledast$” este dată de formula:

$$\theta(f \circledast g) = \theta f * \theta g, \quad f, g \in C(R_+) \tag{2}$$

θ fiind funcția lui Heaviside. Deci $f \circledast g = \theta f * \theta g$ pentru $x \geqslant 0$.

PROPOZIȚIA 1. *Mulțimea $C(R_+)$ înzestrată cu convoluția „$\circledast$” este o algebră comutativă fără element unitate.*

Vom numi această algebră, algebra de convoluție $C(R_+)$.

Demonstrație. Fie $f, g \in C(R_+)$. Atunci $f(t)\, g(x-t)$ este o funcție continuă, iar $(f \circledast g)(x) = \int_0^x f(t)\, g(x-t)\, dt$ există și este o funcție continuă pentru $x \geqslant 0$. În consecință $f \circledast g \in C(R_+)$. Evident, mulțimea $C(R_+)$ în raport cu corpul Γ al numerelor reale sau complexe formează un spațiu vectorial având drept element nul funcția identic nulă pe R_+.

În ce privește comutativitatea și distributivitatea produsului de convoluție, acestea rezultă direct prin schimbarea de variabilă $u = x - t$, cu ajutorul definiției convoluției.

Astfel dacă $f, g, h \in C(R_+)$ și $\alpha, \beta \in \Gamma$, atunci $f \circledast g = g \circledast f$ și $f \circledast (\alpha g + \beta h) = \alpha(f \circledast g) + \beta(f \circledast h)$. Pentru a dovedi asociativitatea produsului de convoluție considerăm funcția:

$$((f \circledast g) \circledast h)(x) = \int_0^x (f \circledast g)(x - t)\, h(t)\, dt =$$

$$= \int_0^x h(t) \left[\int_0^{x-t} g(u)\, f(x - t - u)\, du \right] dt$$

unde $(f \circledast g)(x) = \int_0^x g(u)\, f(x - u)\, du$.

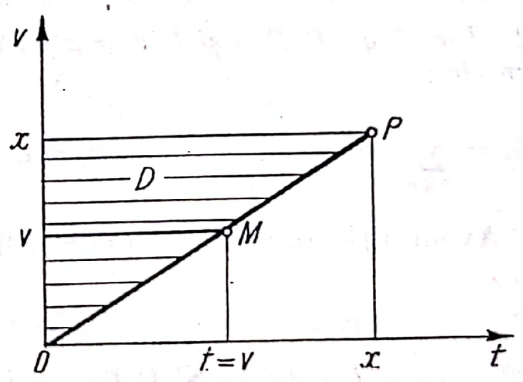

Fig. 3

Trecînd de la variabila u la v prin relația $v = u + t$ obținem:

$$((f \circledast g) \circledast h)(x) = \int_0^x h(t) \left[\int_t^x g(v - t)\, f(x - v)\, dv \right] dt.$$

Integrala obținută poate fi considerată ca o integrală dublă extinsă la triunghiul isoscel D din planul (tOv) (fig. 3) anume $D = \{(t, v) \mid 0 \leqslant t \leqslant v \leqslant x\}$

Scanned with OKEN Scanner

În acest fel, schimbînd ordinea de integrare obținem:

$$((f \circledast g) \circledast h)(x) = \iint_D h(t)\, g(v-t)\, f(x-v)\, dt\, dv =$$

$$= \int_0^x f(x-v)\left[\int_0^v g(v-t)\, h(t)\, dt\right] dv = \int_0^x f(x-v)(g \circledast h)(v)\, dv = (f \circledast (g \circledast h))(x).$$

Cu aceasta asociativitatea este dovedită.

Să arătăm că această algebră nu are element unitate.

Într-adevăr, dacă ar exista un asemenea element $e \in C(R_+)$ atunci $\forall_{f \in C(R_+)}$ am avea $(e \circledast f)(x) = (f \circledast e)(x) = f(x)$. În particular, pentru $f(x) = 1$, $x \geqslant 0$, am avea: $\int_0^x e(t)\, dt = 1$ pentru $x \geqslant 0$, ceeace este imposibil.

Algebra de convoluție $C(R_+)$ este dominată de o teoremă importantă a lui Titchmarsch, care arată că această algebră nu are divizori ai lui zero. Astfel dacă $f, g \in C(R_+)$ și $f \circledast g = 0$, atunci $f = 0$ sau $g = 0$ și în consecință ecuația $f \circledast X = g$ admite o singură soluție $X \in C(R_+)$.

Soluția X se poate considera ca fiind cîtul elementelor f și g în raport cu convoluția „$\circledast$" în R_+. Bazat pe aceasta J. Mikusiński în [72] elaborează o teorie a algebrei cîturilor de convoluție ale căror elemente pot fi interpretate ca operatori sau distribuții. Teoria lui J. Mikusiński dă calculului operațional o bază profundă și eficace și care se poate aplica unor largi clase de probleme din domeniul ecuațiilor diferențiale cu coeficienți constanți, ecuațiilor integrale și altor domenii. Pe lîngă [72], o prezentare a calculului operațional bazat pe teoria lui J. Mikusiński este dată în [26]. Menționăm că în [19], M. Dufresnoy dă o demonstrație a teoremei lui Titchmarsch pe baza transformatei Laplace. Deasemeni în [71] J. Mikusiński dă o demonstrație simplă acestei teoreme. Înainte de a da demonstrația teoremei lui Titchmarsch vom pune în evidență în algebra de convoluție $C(R_+)$ o relație analogă formulei lui Leibniz.

Propoziția 2. *Fie* $f, g \in C(R_+)$ *și* $f_n(x) = x^n f(x)$, $g_n(x) = x^n g(x)$, $x \geqslant 0$. *Atunci are loc formula*:

$$(f \circledast g)_n = \sum_{p \leqslant n} \frac{n!}{p!\,(n-p)!} (f_{n-p} \circledast g_p), \quad p \in N_0. \tag{3}$$

Demonstrație. Avem $(f+g)_n(x) = x^n(f(x)+g(x)) = f_n(x) + g_n(x)$, deci $(f+g)_n = f_n + g_n$.

Deoarece

$$x^n = (x - t + t)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p t^p (x-t)^{n-p}$$

și

$$(f \circledast g)_n(x) = x^n \int_0^x f(x-t)\, g(t)\, dt$$

obținem

$$(f \circledast g)_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \int_0^x (x-t)^{n-p} f(x-t) t^p g(t)\, C_n^p\, dt = \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!\,(n-p)!} (f_{n-p} \circledast g_p)(x).$$

Scanned with OKEN Scanner

În particular, pentru $n=1$ obținem :

$$(f \circledast g)_1 = f_1 \circledast g + f \circledast g_1 \tag{3'}$$

TEOREMA LUI TITCHMARSH. *Dacă* $f, g \in C(R_+)$ *și* $f \circledast g = 0$ *atunci* $f = 0$ *sau* $g = 0$ *pe* R_+.

Pentru demonstrația acestei teoreme vom utiliza cîteva rezultate preliminare.

TEOREMA LUI FHRAGMÉN. *Dacă* $f \in C[0, T]$ *atunci pentru* $t \in [0, T]$,

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^T e^{kx(t-u)} f(u)\, du = \int_0^t f(u)\, du.$$

Demonstrație. Putem scrie dezvoltarea în serie :

$$1 - \exp[-e^{x(t-u)}] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kx(t-u)}$$

care pentru orice x și t fixați, converge uniform în raport cu u pe $[0, T]$. În consecință integrînd termen cu termen obținem :

$$\int_0^T [1 - \exp(-e^{x(t-u)})] f(u)\, du = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^T e^{kx(t-u)} f(u)\, du.$$

Deoarece $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(-e^{x(t-u)}) = \begin{cases} 0, & u < t \\ 1, & t < u \end{cases}$ avem :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^T [1-\exp(-e^{x(t-u)})] f(u)\, du = \int_0^T \lim_{x\to+\infty} [1-\exp(-e^{x(t-u)})] f(u)\, du =$$

$$= \int_0^t f(u)\, du + \int_t^T du = \int_0^t f(u)\, du.$$

LEMA 1. *Dacă* $g \in C[0, T]$ *și* $\left|\int_0^T e^{nt} g(t)\, dt\right| < M$, $n \in N$, *atunci* $g \equiv 0$ *pe* $[0, T]$.

Într-adevăr, considerînd $x=n$ în formula lui Fhragmén și $f(u) = g(T-u)$ obținem :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{-kn(T-t)} \int_0^T e^{kn(T-u)} g(T-u)\, du = \int_0^t g(T-u)\, du$$

dar

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{-kn(T-t)} \int_0^T e^{kn(T-u)} g(T-u)\, du \right| \leqslant M \exp(e^{-n(T-t)} - 1).$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $t<T$, atunci pentru $n\to+\infty$, pe baza teoremei lui Fhragmén obţinem $\int_0^t g(T-u)\,du=0$ pentru $t\in[0,\,T]$. Deoarece funcţia g este continuă pe $[0,\,T]$ rezultă $g\equiv 0$ pe $[0,\,T]$.

TEOREMA LUI LERCH. *Dacă* $f\in C[0,\,T]$ *şi* $\int_0^T x^n f(x)\,dx=0$ *pentru* $n\in N$, *atunci* $f\equiv 0$ *pe* $[0,\,T]$.

Demonstraţie. Pentru $0<t_0<T$ avem :

$$\int_0^{t_0}\left(\frac{x}{t_0}\right)^n f(x)\,dx+\int_{t_0}^{T}\left(\frac{x}{t_0}\right)^n f(x)\,dx=\frac{1}{t_0^n}\int_0^T x^n f(x)\,dx=0.$$

Deci

$$\left|\int_{t_0}^{T}\left(\frac{x}{t_0}\right)^n f(x)\,dx\right|=\left|\int_0^{t_0}\left(\frac{x}{t_0}\right)^n f(x)\,dx\right|\leqslant\int_0^{t_0}|f(x)|\,dx\leqslant t_0\sup_{x\in[0,\,T]}|f(x)|.$$

Prin schimbarea de variabilă $x=e^t t_0$, obţinem :

$$\left|\int_0^{\xi} e^{nt}f(t_0e^t)\,e^t\,dt\right|\leqslant\sup_{x\in[0,\,T]}|f|,\quad n\in N$$

unde $T=e^{\xi}t_0$.

În baza lemei 1, avem $f(t_0e^t)=0$ pentru $t\in[0,\,\xi]$, deci $f(x)=0$, pentru $x\in[t_0,\,T]$. Cum f este continuă şi $t_0\in(0,\,T)$ este arbitrar, deducem $f(x)=0$ pentru $x\in[0,\,T]$.

LEMA 2. (Teorema lui Titchmarch pentru cazul $f=g$). *Dacă* $f\in C[0,\,2T]$ *şi* $f\circledast f=0$ *pentru* $x\in[0,\,2T]$ *atunci* $f\equiv 0$ *pe* $[0,\,T]$.

Demonstraţie. Deoarece $f^{\circledast 2}(x)=(f\circledast f)(x)=0$ pentru $x\in[0,\,2T]$, putem scrie :

$$I_n=\int_0^{2T}e^{n(2T-x)}f^{\circledast 2}(x)\,dx=\int_0^{2T}e^{n(2T-x)}\left[\int_0^x f(u)\,f(x-u)\,du\right]dx=0.$$

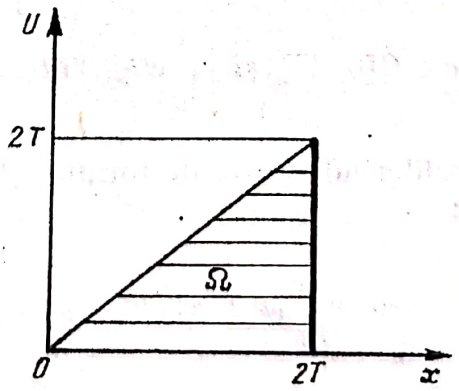

Fig. 4

Integrala din membrul drept poate fi considerată ca o integrală dublă extinsă la domeniul triunghiular $\Omega=\{(u,\,x);\,0\leqslant u\leqslant x\leqslant 2T\}$ (fig. 4)

din care motiv :

$$\iint_{\Omega} e^{n(2T-x)} f(u)\, f(x-u)\, dx\, du = 0.$$

În urma schimbării de variabile $u = T - v$, $x = 2T - v - w$, deoarece $J = \dfrac{D(x, u)}{D(v, w)} = 1$, obţinem :

$$\iint_{\Omega_1} e^{n(v+w)} f(T-v)\, f(T-w)\, dv\, dw = 0$$

unde $\Omega_1 = \{(v, w),\ v+w \geqslant 0,\ v \leqslant T,\ w \leqslant T\}$ (fig. 5).

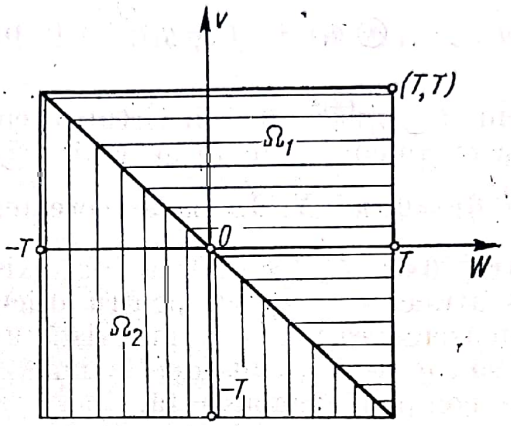

Fig. 5

Notînd prin $\Omega_2 = \{(v, w);\ v+w \leqslant 0,\ -T \leqslant v,\ -T \leqslant w\}$ simetricul lui Ω faţă de a doua bisectoare, observăm că $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega_3$, unde Ω_3 reprezintă patratul din figura 5, anume $\Omega_3 = \{(v, w);\ v \in [-T, T],\ w \in [-T, T]\}$.

Pe baza aditivităţii integralei faţă de domeniul de integrare şi deoarece $\iint_{\Omega_1} = 0$, obţinem :

$$\left| \iint_{\Omega_3} e^{n(v+w)} f(T-v)\, f(T-w)\, dw\, dv \right| = \left| \int_{-T}^{T} e^{nu} f(T-u)\, du \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \iint_{\Omega_2} |f(T-v)\, f(T-w)|\, dw\, dv \leqslant 2T^2 M^2$$

unde $M = \sup_{t \in [0,\, 2T]} |f|$, măs $(\Omega_2) = 2T^2$.

În consecinţă

$$\left| \int_{-T}^{T} e^{nu} f(T-u)\, du \right| \leqslant \sqrt{2} \cdot TM.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar $\left|\int_0^T e^{nu} f(T-u)\,du\right| = \left|\int_{-T}^{T} - \int_{-T}^{0}\right| \leqslant T \cdot M(\sqrt{2}+1)$ pentru $n \in N$. În baza lemei 1 avem $f(T-u) \equiv 0$ pentru $u \in [0, T]$, deci $f(x) \equiv 0$ pe $[0, T]$. Cu aceste rezultate putem acum demonstra teorema lui Titchmarsh.

Fie $f, g \in C(R_+)$ și $(f \circledast g)(t) \equiv 0$, $t \in R_+$. Atunci $f \circledast g = 0 \Rightarrow (f \circledast g)_1 \equiv 0$ și în baza formulei (3') avem

$$f_1 \circledast g + f \circledast g_1 \equiv 0 \text{ pe } R_+.$$

În baza comutativității și asociativității convoluției „$\circledast$", obținem:

$$(f \circledast g_1) \circledast (f_1 \circledast g + f \circledast g_1) \equiv 0 \text{ pe } R_+$$

adică

$$(f \circledast g) \circledast (f_1 \circledast g_1) + (f \circledast g_1)^{\circledast 2} \equiv 0 \text{ pe } R_+.$$

Cum $f \circledast g = 0$ obținem $(f \circledast g_1)^{\circledast 2} = 0$ și în virtutea lemei 2, $f \circledast g_1 \equiv 0$. Prin repetarea acestui raționament avem în general $f \circledast g_n \equiv 0$ pentru $n \in N$, adică $\int_0^t u^n g(u) f(t-u)\,du = 0$, $n \in N$. În baza teoremei lui Lerch deducem $g(u) f(t-u) = 0$ pentru $0 \leqslant u \leqslant t < \infty$. Dacă ar exista un punct $u_0 \geqslant 0$ astfel încît $g(u_0) \neq 0$ atunci $f(t-u_0) = 0$ pentru orice $t \geqslant u_0$, deci $f(v) = 0$ pentru $v \geqslant 0$. Dacă un asemenea punct u_0 nu există, atunci $g(v) = 0$ pentru $v \geqslant 0$. În concluzie f sau g pe R_+, sînt identic nule. Cu aceasta teorema lui Titchmarsh este complet demonstrată.

Exemplul 1. Fie $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $x \in [0, \infty)$. Atunci: $\sin x \circledast \cos x = \frac{1}{2} x \sin x$; $\cos^{\circledast 2} x = \frac{1}{2}(x \cos x + \sin x)$; $\sin^{\circledast 2} x = \frac{1}{2}(\sin x - x \cos x)$.

Într-adevăr, avem $\sin x \circledast \cos x = \int_0^x \sin t \cos(x-t)\,dt$.

Deoarece $\sin t \cos(x-t) = \frac{1}{2}(\sin x + \sin(2t-x))$, obținem

$$\sin x \circledast \cos x = \frac{1}{2}\int_0^x [\sin x + \sin(2t-x)]\,dt = \frac{1}{2} \sin x[t]\Big|_0^x - \left[\frac{\cos(2t-x)}{4}\right]\Big|_0^x = \frac{1}{2} x \sin x.$$

Analog, deoarece $\cos t \cos(x-t) = \frac{1}{2}(\cos x + \cos(2t-x))$, obținem

$$\cos^{\circledast 2} x = \cos x \circledast \cos x = \int_0^x \cos t \cos(x-t)\,dt = \frac{1}{2} \cos x[t]\Big|_0^x + \frac{\sin(2t-x)}{4}\Big|_0^x = \frac{1}{2}(x \cos x + \sin x).$$

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea putem scrie

$$\sin x^{\circledast 2} = \sin x \circledast \sin x = \int_0^x \sin t \sin (x - t)\, dt =$$

$$= \int_0^x \sin t[\sin x \cos t - \sin t \cos x]\, dt = \frac{1}{2} \sin x \int_0^x \sin 2t\, dt -$$

$$- \frac{\cos x}{2} \int_0^x (1 - \cos 2t)\, dt = - \frac{1}{4} \sin x (\cos 2t) \Big|_0^x - \frac{\cos x}{2} \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right] \Big|_0^x =$$

$$= \frac{\sin x}{4} (1 - \cos 2x) - \frac{\cos x}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) = \frac{1}{2} (\sin x - x \cos x).$$

Exemplul 2. Fie $f(x) = 1$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$, $x \in R_+$. Au loc relațiile:

$$1 \circledast \sin x = 1 - \cos x; \quad \sin x \circledast \cos^2 \frac{x}{2} = \sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} x \cos \frac{x}{2} \right).$$

Într-adevăr avem: $1 \circledast \sin x = \int_0^x \sin (x - t)\, dt = \cos (x - t) \Big|_0^x =$ $= 1 - \cos x$. Deoarece $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$, obținem:

$$\sin x \circledast \cos^2 \frac{x}{2} = \sin x \circledast \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos x}{2} \right) = \frac{1}{2} \sin x \circledast 1 + \frac{1}{2} \sin x \circledast \cos x =$$

$$= \frac{1 - \cos x}{2} + \frac{1}{4} x \sin x = \sin^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} =$$

$$= \sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right).$$

§ 2. Produsul de convoluție pentru distribuții

1. Produsul direct pentru funcții și distribuții. Proprietăți generale

Una din căile simple prin care se realizează extinderea produsului de convoluție de la funcții la distribuții este utilizarea produsului direct.

Fie f și g două funcții complexe definite respectiv pe R^n și R^m cu punctele generice $x \in R^n$, $y \in R^m$. Atunci $R^n \times R^m = R^{n+m}$ este tot un spațiu euclidian $n + m$ dimensional cu punctul generic $(x, y) \in R^{n+m}$.

DEFINIȚIA 1. Funcția complexă $f \times g: R^{n+m} \to \Gamma$ definită prin relația $(f \times g)(x, y) = f(x)\, g(y)$ se numește produsul direct sau tensorial al funcției f prin funcția g.

Scanned with OKEN Scanner

PROPOZIȚIA 1. *Fie* $f \in C^k(R^n)$, $g \in C^k(R^m)$; *atunci au loc proprietățile*:

$$1^\circ\ f \times g \in C^k(R^{n+m}) \tag{1}$$

$$2^\circ\ D_x^p D_y^q (f \times g) = D_x^p f \times D_y^q g, \quad |p|, |q| \leqslant k \tag{2}$$

$$3^\circ\ \operatorname{supp}(f \times g) = \operatorname{supp} f \times \operatorname{supp} g. \tag{3}$$

Demonstrație. Evident, avem $D_x^p D_y^q (f \times g)(x, y) = D_x^p f(x)\, D_y^q g(y) = (D_x^p f \times D_y^q g)(x, y)$ de unde 1° și 2°.

Fie $(x_0, y_0) \in \operatorname{supp}(f \times g)$. Atunci $\underset{U((x_0, y_0), r)}{\forall} \underset{(x, y) \in U((x_0, y_0), r)}{\exists} (f \times g)(x, y) \neq 0$ care implică $f(x) \neq 0$, $g(y) \neq 0$, deci $x_0 \in \operatorname{supp} f$, $y_0 \in \operatorname{supp} g$, de unde rezultatul 3°. Vom nota cu $K_x = K(R^n)$, $K_y = K(R^m)$, $K_{x,y} = K(R^n \times R^m)$ spațiile fundamentale K de funcții de clasa C^∞ cu suport compact pe R^n, R^m, R^{n+m} și K'_x, K'_y, $K'_{x,y}$ spațiul K' al distribuțiilor corespunzătoare.

Pe baza teoremei partiției unității (I.4.2), se observă că $K_x \times K_y$ reprezintă un subspațiu vectorial al lui $K_{x,y} = K(R^{n+m})$ generat de funcții de forma $u \times v$ cu $u \in K_x$, $v \in K_y$.

PROPOZIȚIA 2. *Spațiul* $K_x \times K_y = K(R^n) \times K(R^m)$ *este dens în* $K_{x,y} = K(R^{n+m})$.

Demonstrație. Conform teoremei lui Weierstrass, $\underset{\substack{f \in C^p(\Omega) \\ \varepsilon \in R^+}}{\forall}$ Ω compact, $\Omega \subset R^l$, există un polinom P_ε astfel încît $\sup_{x \in \Omega} |D^\alpha f - D^\alpha P_\varepsilon| < \varepsilon$ pentru $|\alpha| < p$. Fie $\varphi \in K(R^{n+m})$, $\Omega = \operatorname{supp} \varphi$ și cubul $A = \{(x, y) \in R^{n+m}, \|x\| \leqslant a, \|y\| \leqslant a\}$.

Atunci există șirul de polinoame $(P_i)_{i \in N}$, astfel încît să avem $|D^\alpha \varphi(x, y) - D^\alpha P_i(x, y) < \frac{1}{i}$ $(i \in N)$ pe cubul $A \supset \Omega$. Considerăm funcțiile $\rho \in K_x$, $\sigma \in K_y$ cu proprietatea $\rho(x)\, \sigma(y) = 1$ pe o vecinătate $\Omega_\varepsilon \subset A$ a lui Ω și $\rho(x)\, \sigma(y) = 0$ pentru $\|x\| \geqslant a$ sau $\|y\| \geqslant a$. Evident,

$$(\rho \times \sigma)(x, y) = \rho(x)\, \sigma(y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Omega_\varepsilon \\ 0, & \|x\| \geqslant a \text{ sau } \|y\| \geqslant a. \end{cases}$$

O asemenea alegere a funcțiilor ρ și σ este posibilă datorită propoziției 5 din II.1.2. În aceste condițiuni $\operatorname{supp} \rho\sigma P_i \subset A$ și $\rho(x)\, \sigma(y)\, P_i(x, y) \overset{u}{\Rightarrow} \varphi(x, y)$ în $K_{x,y}$. Deoarece $\rho(x)\, \sigma(y)\, P_i(x, y)$ este o sumă de produse de funcții $u_i \in K_x$, $v_i \in K_y$, rezultă că ea aparține spațiului $K_x \times K_y$ și cu aceasta propoziția este demonstrată. În consecință, $\underset{\varphi(x, y) \in K_{x,y}}{\forall} \underset{(\varphi_i(x, y))_{i \in N}}{\exists} \varphi_i(x, y) = \sum_{k=1}^{p} u_{ik}(x) v_{ik}(y)$ cu $u_{ik} \in K_x$, $v_{ik} \in K_y$ astfel încît $\varphi_i \to \varphi$. Deci mulțimea funcțiilor fundamentale $\varphi(x, y) \in K(R^{n+m})$ de forma $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{p} u_i(x)\, v_i(y)$ cu $u_i \in K(R^n)$, $v_i \in K(R^m)$ este densă în $K(R^{n+m})$.

Acest rezultat se generalizează ușor și avem: $K(R^n) \times K(R^m) \times K(R^l)$ este un subspațiu vectorial al lui $K(R^{n+m+l})$ și este dens în acesta.

Scanned with OKEN Scanner

Fie f şi g funcţii local integrabile respectiv pe R^n şi R^m. Atunci $h(x, y) = f(x)\, g(y)$ este deasemenea o funcţie local integrabilă pe R^{n+m}, deci defineşte o distribuţie regulată şi $\forall_{\varphi \in K(R^{n+m})}$ avem pe baza teoremei lui Fubini:

$$(f(x) \times g(y),\ \varphi(x, y)) = \int_{R^{n+m}} f(x)\, g(y)\, \varphi(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{R^n} f(x)\, dx \int_{R^m} f(y)\, \varphi(x, y)\, dy = (f(x),\ (f(y),\ \varphi(x, y))). \tag{4}$$

Analog obţinem:

$$(f(x) \times g(y),\ \varphi(x, y)) = (g(y),\ (fx),\ \varphi(x, y))). \tag{5}$$

În particular, dacă $\varphi \in K(R^{n+m})$ este de forma $\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\, \varphi_2(y)$ cu $\varphi_1 \in K(R^n)$ şi $\varphi_2 \in K(R^m)$, atunci formulele (4), (5) devin:

$$(f(x) \times g(y),\ \varphi_1(x) \times \varphi_2(y)) = (f(x),\ \varphi_1(x)) \cdot (g(y),\ \varphi_2(y)). \tag{6}$$

Relaţiile (4), (5), (6) privind produsul direct pentru funcţii se generalizează pentru distribuţii şi astfel avem:

PROPOZIŢIA 3. *Fie* $f_x \in K'_x = K'(R^n)$, $g_y \in K'_y = K'(R^m)$. *Atunci* $\forall_{\varphi \in K_{x,y} = K(R^{n+m})}$ *există* $f_x \times g_y \in K'_{x,y}$ *şi avem:*

$$(f_x \times g_y,\ \varphi) = (f_x,\ (g_y,\ \varphi(x, y))) \tag{7}$$

Distribuţia $f_x \times g_y$ *se numeşte produsul direct sau tensorial al distribuţiei* $f_x \in K'_x$ *prin* $g_y \in K'_y$.

Demonstraţie. Pentru x fixat, $\varphi(x, y) \in K_y = K(R^m)$. În consecinţă $\psi(x) = (g_y,\ \varphi(x, y))$ este o funcţie definită pe R^n.

Această funcţie este indefinit derivabilă deoarece pentru $R^n \ni h = (0, 0, \ldots, 0, h_i, 0, 0, \ldots, 0) > 0$ avem:

$$\frac{\psi(x + h) - \psi(x)}{h_i} = \left(g_y,\ \frac{\varphi(x + h,\ y) - \varphi(x, y)}{h_i}\right) \to \left(g_y,\ \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_i}\right)$$

deoarece funcţionala g_y este continuă în $K_y = K(R^m)$, iar

$$\frac{\varphi(x + h, y) - \varphi(x, y)}{h_i} \to \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_i}$$

în sensul convergenţei spaţiului $K(R^m)$. Ţinînd seamă că $\operatorname{supp} D^\alpha \varphi(x, y) \subset \operatorname{supp} \varphi(x, y)$ rezultă că $\psi(x)$ are suport compact, deci $\psi \in K(R^n)$ şi astfel are sens expresia $(f_x,\ \psi(x))$. În consecinţă $(f_x \times g_y,\ \varphi)$ există şi pe baza continuităţii funcţionalelor f_x, g_y rezultă continuitatea funcţionalei $f_x \times g_y$.

Scanned with OKEN Scanner

În particular, dacă funcţia $\varphi(x, y) \in K(R^{n+m})$ este de forma $\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(y)$ cu $\varphi_1 \in K(R^n)$, $\varphi_2 \in K(R^m)$ atunci formula (7) devine:

$$(f_x \times g_y,\ \varphi_1(x)\,\varphi_2(y)) = (f_x,\ \varphi_1(x)) \cdot (g_y,\ \varphi_2(y)) \tag{7'}$$

care constituie o generalizare a formulei (6) pentru funcţii.

Proprietăţi ale produsului direct

PROPOZIŢIA 4. *Fie* $f_x \in K'(R^n)$, $g_y \in K'(R^m)$. *Atunci avem* $f_x \times g_y = g_y \times f_x$ *deci produsul direct este comutativ.*

Demonstraţie. În baza proprietăţii de densitate precizată de propoziţia 2, spaţiul $K(R^n) \times K(R^m)$ fiind dens în $K(R^{n+m})$ $\forall_{\varphi(x,y) \in K(R^{n+m})}$ avem: $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{p} u_i(x)\, v_i(y)$, unde $u_i \in K(R^n)$, $v_i \in K(R^m)$. În consecinţă putem scrie:

$$(f_x \times g_y,\ \varphi(x, y)) = \left(f_x,\ \sum_{i=1}^{p} u_i(x)\,(g_y,\ v_i(y))\right) = \sum_{i=1}^{p} (f_x,\ u_i(x))\,(g_y,\ v_i(y))$$

Analog obţinem:

$$(g_y \times f_x,\ \varphi(x, y)) = \left(g_y,\ \sum_{i=1}^{p} v_i(y)\,(f_x,\ u_i(x))\right) = \sum_{i=1}^{p} (f_x,\ u_i(x))\,(g_y,\ v_i(y)).$$

Din compararea relaţiilor obţinute, cu ajutorul definiţiei egalităţii a două distribuţii, rezultă proprietatea de comutativitate a produsului direct a două distribuţii.

În ce priveşte suportul produsului direct a două distribuţii vom arăta că proprietatea 3° din propoziţia 1 se păstrează.

PROPOZIŢIA 5. *Dacă* $f_x \in K'(R^n)$ *şi* $g_y \in K'(R^m)$ *avem*

$$\operatorname{supp}(f_x \times g_y) = \operatorname{supp} f_x \times \operatorname{supp} g_y.$$

Demonstraţie. Într-adevăr, fie $A = \operatorname{supp} f$, $B = \operatorname{supp} g$ şi $CA = A_1$, $CB = B_1$ complementarele lor, respectiv în R^n şi R^m. Dacă $\varphi(x, y) \in K(R^{n+m})$ şi $\operatorname{supp} \varphi(x, y) \subset A_1 \times R^m$ sau în $R^n \times B_1$, atunci $(g_y, \varphi(x, y)) = (f_x, \varphi(x, y)) = 0$, deci $f_x \times g_y = 0$. În consecinţă, $\operatorname{supp}(f_x \times g_y) \subset A \times B$ Să arătăm că în orice vecinătate $\Omega \subset A \times B$ a lui $z \in A \times B$ avem $f_x \times g_y \neq 0$. Considerăm funcţiile $u(x) \in K(R^n)$, $v(y) \in K(R^m)$ cu $\operatorname{supp} uv \subset \Omega$. Atunci $(f_x, u(x)) = (g_y, v(y)) \neq 0$ şi deoarece $uv \in K(R^{n+m})$ avem:

$$(f_x \times g_y, uv) = (f_x, u)\,(g_y, v) \neq 0, \quad \text{adică} \quad (f_x \times g_y, uv) \neq 0$$

deci $A \times B \subset \operatorname{supp}(f_x \times g_y)$ întrucît orice punct din $A \times B$ aparţine lui $\operatorname{supp}(f_x \times g_y)$. Propoziţia este astfel complet demonstrată.

PROPOZIŢIA 6. *Produsul direct este asociativ, adică dacă* $f_x \in K'(R^n)$, $g_y \in K'(R^m)$, $h_z \in K'(R^l)$ *atunci*

$$f_x \times (g_y \times h_z) = (f_x \times g_y) \times h_z.$$

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, $\underset{\varphi \in K(R^{n+m+l})}{\forall}$ avem :

$$(f_x \times (g_y \times h_z),\ \varphi) = (f_x,\ (g_y \times h_z,\ \varphi)) = (f_x,\ (g_y,\ (h_z,\ \varphi)) =$$

$$= (f_x \times g_y,\ (h_z,\ \varphi)) = ((f_x \times g_y) \times h_z,\ \varphi),$$

adică ceeace trebuia demonstrat.

Distributivitatea produsului direct în raport cu adunarea distribuţiilor din acelaşi spaţiu este evidentă. Astfel dacă $f_x \in K'(R^n)$, $g_y,\ h_y \in K'(R^m)$ şi $\alpha,\ \beta \in \Gamma$ are loc relaţia :

$$f_x \times (\alpha g_y + \beta h_y) = \alpha(f_x \times g_y) + \beta(f_x \times h_y).$$

PROPOZIŢIA 7. *Fie* $f_x \in K'(R^n)$, $g_y \in K'(R^m)$ şi operatorii de derivare D_x^α, D_y^β. Atunci avem :

$$D_x^\alpha D_y^\beta (f_x \times g_y) = D_x^\alpha f_x \times D_y^\beta g_y.$$

Într-adevăr, $\underset{\varphi(x,\,y) \in K_{(R^{n+m})}}{\forall}$ putem scrie :

$$(D_x^\alpha D_y^\beta (f_x \times g_y),\ \varphi) = (-1)^{|\alpha|+|\beta|}(f_x,\ (g_y,\ D_x^\alpha D_y^\beta \varphi)) =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}(f_x,\ (D_y^\beta g_y,\ D_x^\alpha \varphi)) = (-1)^{|\alpha|}(D_y^\beta g_y,\ (f_x,\ D_x^\alpha \varphi)) =$$

$$= (D_y^\beta g_y,\ (D_x^\alpha f_x,\ \varphi)) = (D_x^\alpha f_x \times D_y^\beta g_y,\ \varphi)$$

de unde pe baza egalităţii a două distribuţii se obţine rezultatul cerut.

Această proprietate a operatorului de derivare faţă de produsul direct are un analog referitor la înmulţirea produsului direct cu o funcţie indefinit derivabilă de forma $a(x)\,b(y)$, $a \in C^\infty(R^n)$, $b(y) \in C^\infty(R^m)$.

Urmînd o demonstraţie analoagă cu cea precedentă obţinem relaţia :

$$a(x)\,b(y)\,(f_x \times g_y) = a(x)\,f_x \times b(y)\,g_y, \tag{8}$$

unde $f_x \in K'(R^n)$, $g_y \in K'(R^m)$.

Exemplul 1. Fie $\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & x_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$ funcţia lui Heaviside definită pe R^n şi $\theta(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ funcţia lui Heaviside de o singură variabilă.

Avem evident relaţiile :

$$\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \theta(x_i) = \theta(x_1) \times \theta(x_2) \times \ldots \times \theta(x_n)$$

$$\operatorname{supp}\ \theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \operatorname{supp}\theta(x_1) \times \operatorname{supp}\theta(x_2) \times \ldots \times \operatorname{supp}\ \theta(x_n) =$$

$$= [0, \infty) \times [0, \infty) \times \ldots \times [0, \infty).$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}\,\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \delta_{x_1, x_2, \ldots, x_n}\,;\quad \frac{\partial\,\theta(x_i)}{\partial x_i} = \delta_{x_i}$$

avem :

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}\,\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial\theta(x_1)}{\partial x_1} \times \frac{\partial\theta(x_2)}{\partial x_2} \times \ldots \times \frac{\partial\theta(x_n)}{\partial x_n}$$

adică

$$\delta_{x_1, x_2, \ldots, x_n} = \delta_{x_1} \times \delta_{x_2} \times \ldots \times \delta_{x_n}$$

unde δ_{x_i}, $\delta_{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ reprezintă distribuţiile lui Dirac concentrate în origine, respectiv pe R şi R^n.

În legătură cu operatorul de translaţie şi produsul direct are loc :

PROPOZIŢIA 8. *Dacă* $f_x \in K'(R^n)$, $g_y \in K'(R^m)$ şi $(\lambda_1, \lambda_2) \in R^{n+m}$ *atunci*

$$\tau_{(\lambda_1, \lambda_2)}(f_x \times g_y) = \tau_{\lambda_1} f_x \times \tau_{\lambda_2} g_y. \tag{9}$$

Demonstraţie. $\forall_{\varphi(x, y) \in K(R^{n+m})}$ avem :

$$(\tau_{(\lambda_1, \lambda_2)}(f_x \times g_y),\ \varphi) = (f_x \times g_y,\ \tau_{-(\lambda_1, \lambda_2)}\varphi(x, y)).$$

Deoarece $\tau_{(\lambda_1, \lambda_2)} = \tau_{\lambda_1}(\tau_{\lambda_2}) = \tau_{\lambda_2}(\tau_{\lambda_1})$ obţinem :

$$(\tau_{(\lambda_1, \lambda_2)} f_x \times g_y,\ \varphi) = (f_x, (g_y, \tau_{-\lambda_2}(\tau_{-\lambda_1}\varphi))) =$$

$$= (f_x, (\tau_{\lambda_2} g_y, \tau_{-\lambda_1}\varphi)) = (f_x, \tau_{-\lambda_1}(\tau_{\lambda_2} g_y, \varphi)) =$$

$$= (\tau_{\lambda_1} f_x \times \tau_{\lambda_2} g_y, \varphi),$$

aceasta datorită faptului că $(\tau_{\lambda_2} g_y, \tau_{-\lambda_1}\varphi)$ este o funcţie de x, deci $(\tau_{\lambda_2} g_y, \tau_{-\lambda_1}\varphi) = \tau_{-\lambda_1}(\tau_{\lambda_2} g_y, \varphi)$. Cu aceasta propoziţia este dovedită.

Exemplul 2. Fie $\delta_x \in K'(R^n)$, $\delta_y \in K'(R^m)$ distribuţiile lui Dirac concentrate în origine. Atunci, deoarece $\delta_x \times \delta_y = \delta_{x,y}$, $\forall_{(a, b) \in R^{n+m}}$ avem

$$\tau_{(a, b)}(\delta_x \times \delta_y) = \tau_a \delta_x \times \tau_b \delta_y = \tau_{(a, b)} \delta_{x, y} = \delta_{(a, b)}$$

adică printr-o scriere abuzivă

$$\delta(x - a,\ y - b) = \delta(x - a) \times \delta(y - b).$$

Scanned with OKEN Scanner

2. Produsul de convoluție pentru distribuții Criterii de existență. Proprietăți generale

În vederea extinderii produsului de convoluție pentru distribuții, considerăm funcțiile $f, g \in L^1(R^n)$.

Atunci $f * g \in L^1(R^n)$ și $\forall_{\varphi \in K(R^n)}$ avem :

$$((f * g)(x), \varphi(x)) = \int_{R^n} \varphi(x)\, dx \int_{R^n} f(t) g(x-t)\, dt =$$

$$= \int_{R^n \times R^n} f(t) g(x-t) \varphi(x)\, dx\, dt = \int_{R^n \times R^n} f(v)\, g(u) \varphi(u+v)\, du dv$$

după efectuarea schimbării de variabile $x - t = u$, $t = v$. Deoarece $f(v)g(u) = f(v) \times g(u)$, relația precedentă devine :

$$((f * g)(x), \varphi(x)) = (f(x) \times g(y), \varphi^{\Delta}(x, y)) \tag{1}$$

unde s-a notat

$$\varphi^{\Delta}(x, y) = \varphi(x + y). \tag{2}$$

Relația (1) care leagă produsul de convoluție de produsul direct se consideră formula de definiție a produsului de convoluție a două distribuții.

DEFINIȚIA 1. Fie $f, g \in K'(R^n)$. Numim produs de convoluție a distribuției f prin g, distribuția notată $f * g$ și definită pe $K(R^n)$ prin relația :

$$(f * g, \varphi) = (f_x \times g_y, \varphi^{\Delta}(x, y)), \quad \varphi \in K(R^n). \tag{3}$$

Relativ la această definiție observăm că produsul de convoluție $f * g$ nu există pentru orice distribuții $f, g \in K'(R^n)$, deoarece deși $\varphi \in K(R^n)$, deci este indefinit derivabilă și cu suport compact pe R^n, funcția $\varphi^{\Delta}(x, y) = \varphi(x+y)$ este indefinit derivabilă pe R^{2n} dar nu are suportul compact. Într-adevăr, φ^{Δ} este indefinit derivabilă în raport cu x și y iar $\operatorname{supp} \varphi^{\Delta}(x, y) = \{(x, y) \in R^{2n},\ x+y \in \operatorname{supp} \varphi\}$ nu este o mulțime mărginită în R^{2n} deoarece reprezintă o bandă paralelă cu bisectoarea $x+y=0$ (fig. 6).

Din acest motiv pentru ca produsul de convoluție $f * g$ să existe, suporturile distribuțiilor f și g trebuie să îndeplinească anumite condiții. Evident dacă $f * g$ există atunci el reprezintă o distribuție și $f * g \in K'(R^n)$. Produsul de convoluție $f * g$ există dacă $\operatorname{supp}(f_x \times g_y)$ și $\operatorname{supp} \varphi^{\Delta}$ au intersecția mărginită, adică dacă mulțimea $(x, y) \in R^n \times R^n$ cu $x \in \operatorname{supp} f$, $y \in \operatorname{supp} g$ și $x + y \in \operatorname{supp} \varphi$ este mărginită (fig. 7).

PROPOZIȚIA *1. Dacă cel puțin una din distribuțiile $f, g \in K'(R^n)$ are suport compact, atunci produsul de convoluție $f * g$ există în $K'(R^n)$.*

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Evident, dacă $f * g$ există atunci el este o distribuție din $K'(R^n)$. Fie $\varphi \in K(R^n)$, supp $\varphi = \Omega_1$ și supp $f = \Omega_2$ compact. Atunci variabila $x \in \Omega_2$ este mărginită precum și suma $x + y \in \Omega_1$. În consecință $y = (x+y) - x$ este mărginită, adică mulțimea supp $(f_x \times g_y) \cap$ supp φ^Δ este mărginită.

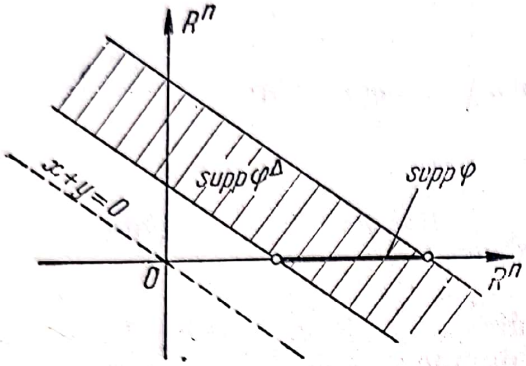

Fig. 6

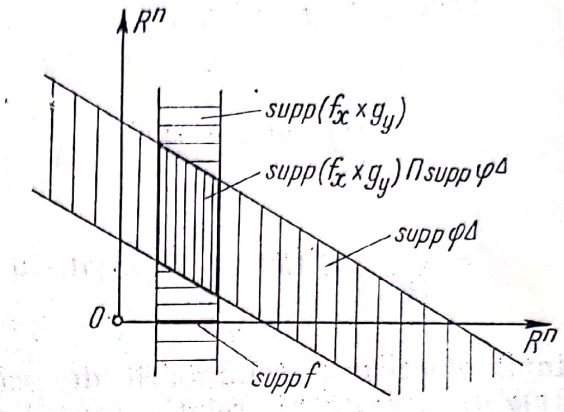

Fig. 7

PROPOZIȚIA 2. *Fie D^α un operator de derivare, iar δ_0, $f \in K'(R^n)$. Atunci avem :*

$$D^\alpha \delta_0 * f = D^\alpha f. \tag{4}$$

Demonstrație. $D^\alpha \delta_0$ este o distribuție cu suport punctual, anume originea, deci $\underset{f \in K'(R^n)}{\forall}$ produsul $D^\alpha \delta_0 * f$ există și pentru $\varphi \in K(R^n)$ avem :

$$(D^\alpha \delta_0 * f,\ \varphi) = (D^\alpha \delta_0(x) \times f_y,\ \varphi^\Delta(x, y)) =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}(f_y,\ (\delta_0 D^\alpha \varphi^\Delta)) = (-1)^{|\alpha|}(f_y,\ D^\alpha \varphi(y)) =$$

$$= (D^\alpha f_y,\ \varphi(y)) = (D^\alpha f,\ \varphi).$$ De unde $D^\alpha \delta_0 * f = D^\alpha f$.

În particular, pentru $\alpha = 0$ obținem :

$$\delta_0 * f = f \tag{5}$$

proprietate care ne arată că distribuția lui Dirac δ_0, reprezintă elementul unitate în raport cu produsul de convoluție.

COROLARUL 1. *Dacă D este un operator diferențial liniar cu coeficienți constanți, atunci $\underset{f \in K'(R^n)}{\forall}$ avem :*

$$D\delta_0 * f = Df. \tag{6}$$

Acest rezultat decurge din proprietatea (4) și din linearitatea operatorului D cu coeficienți constanți.

Deasemeni, $\underset{\substack{f \in K'(R^n) \\ a \in R^n}}{\forall}$ avem :

$$\tau_a \delta_0 * f = \tau_a f. \tag{7}$$

Într-adevăr, $\forall_{\varphi \in K(R^n)}$ putem scrie:

$$(\tau_a \delta_0 * f,\ \varphi) = (f_y, (\tau_a \delta_0,\ \varphi^{\Delta}(x, y))) = (f_y, (\delta_0,\ \varphi(x + a + y)) =$$

$$= (f_y,\ \varphi(a + y)) = (\tau_a f,\ \varphi),$$

de unde se obține rezultatul cerut.

Pentru calculul operațional o deosebită importanță prezintă distribuțiile din $K'(R)$, avînd suporturile mărginite la stînga, deci cu suporturile în $[a, \infty)$.

PROPOZIȚIA 3. *Dacă* $f,\ g \in K'(R)$ *și au suporturile mărginite la stînga atunci produsul* $f * g$ *există.*

Demonstrație. Fie supp $f = \Omega_1$, supp $g = \Omega_2$ și $\Omega_1,\ \Omega_2 \subset (a, \infty)$. Fie deasemenea supp $\varphi = \Omega$, $\varphi \in K(R)$. Atunci pentru $x \in \Omega_1$, $y \in \Omega_2$ deoarece $x + y \in \Omega$ și Ω este compact, rezultă $x \geqslant a$, $y \geqslant a$, $b_1 \leqslant x + y \leqslant b_2$. Deci $x \leqslant b_2 - a$, $y \leqslant b_2 - a$ și în consecință mulțimea $(x, y) \in R^2$ cu $x \in \Omega_1$, $y \in \Omega_2$, $x + y \in \Omega$ este mărginită și produsul de convoluție $f * g$ există (fig. 8).

Observăm că mulțimea supp $(f_x \times g_y)$ reprezentată prin sfertul de plan $x'oy'$ intersectează mulțimea supp φ^{Δ} după trapezul haşurat $ABCD$.

O proprietate analogă are loc dacă distribuțiile $f,\ g \in K'(R)$ au suporturile mărginite la dreapta, adică supp f, supp $g \subset (-\infty, b]$.

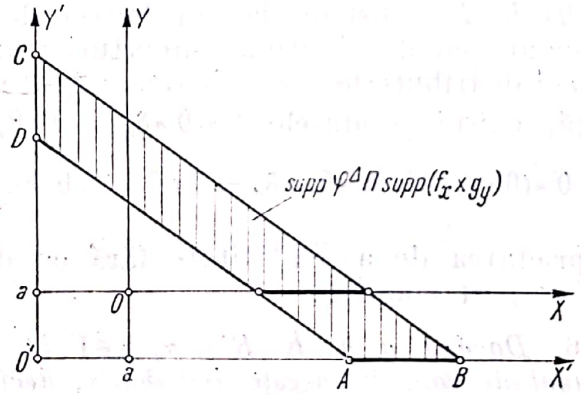

Fig. 8

Proprietăți generale ale produsului de convoluție

PROPOZIȚIA 4. *Fie* $f,\ g \in K'(R^n)$. *Dacă* $f * g$ *există atunci produsul* $g * f$ *există și avem* $f * g = g * f$, *adică produsul de convoluție este comutativ.*

Această proprietate rezultă din definiția produsului de convoluție și din comutativitatea produsului direct a două distribuții.

În ce privește asociativitatea, are loc:

PROPOZIȚIA 5. *Dacă* $f,\ g,\ h \in K'(R^n)$ *și două din cele trei distribuții au suport compact, atunci există distribuțiile* $f * (g * h)$, $(f * g) * h$ *și avem:* $f * (g * h) = (f * g) * h$.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Să presupunem că distribuțiile f și g au suporturile compacte. În baza propoziției 1, distribuțiile $f*(g*h)$ și $(f*g)*h$ există $\forall_{\varphi\in K(R^n)}$ avem:

$$(f*(g*h),\ \varphi) = (f_x\times(g*h)_y,\ \varphi(x+y)) = ((g*h)_y,\ (f_x,\ \varphi(x+y))) =$$

$$= (g_y\times h_z,\ (f_x,\ \varphi(x+y+z))) = (f_x\times g_y\times h_z,\ \varphi(x+y+z)).$$

Analog obținem:

$$((f*g)*h,\ \varphi) = ((f*g)_y\times h_z,\ \varphi(y+z)) = (f_x\times g_y,\ (h_z,\ \varphi(x+y+z))) =$$

$$= (f_x\times g_y\times h_z,\ \varphi(x+y+z)).$$

Deci $(f*(g*h),\ \varphi) = ((f*g)*h,\ \varphi)$.

Pe baza egalității a două distribuții rezultă proprietatea de asociativitate.

Observația 1. Relația obținută pentru $\varphi\in K(R^n)$, anume:

$$(f*g*h,\ \varphi) = (f_x\times g_y\times h_z,\ \varphi(x+y+z))$$

poate fi considerată drept relație de definiție a produsului de convoluție a mai multor distribuții având suporturile compacte, cu excepția eventual a uneia.

Remarcăm că produsul de convoluție a mai multor distribuții poate să fie asociativ fără ca să fie îndeplinite condițiile relative la suport.

Astfel, fie $\theta\in K'(R)$, distribuția lui Heaviside. Atunci produsul $\theta*\theta$ există deoarece ambele distribuții au suporturile mărginite la stînga și de asemenea există distribuția $\theta*\delta_0 = \theta$ deoarece δ_0 are suport punctual.

În consecință, există produsele $\theta*(\theta*\delta_0)$, $(\theta*\theta)*\delta_0$ și avem:

$$\theta*(\theta*\delta_0) = (\theta*\theta)*\delta_0 = \theta*\theta = x\theta(x).$$

Deci are loc proprietatea de asociativitate fără ca două din cele trei distribuții să aibă suport compact.

PROPOZIȚIA 6. *Dacă f, g, $h\in K'(R^n)$, α, $\beta\in\Gamma$ iar f are suport compact, atunci produsul de convoluție este distributiv, deci*

$$f*(\alpha g+\beta h) = \alpha(f*g)+\beta(f*h).$$

Într-adevăr, $\alpha g+\beta h\in K'(R^n)$ și cum f are suport compact produsul de convoluție considerat există. Datorită distributivității produsului direct față de adunare, $\forall_{\varphi\in K(R^n)}$ avem:

$$(f*(\alpha g+\beta h),\ \varphi) = (f_x\times(\alpha g_y+\beta h_y),\ \varphi(x+y)) =$$

$$= \alpha(f_x\times g_y,\ \varphi(x+y))+\beta(f_x\times h_y,\ \varphi(x+y)) =$$

$$= (\alpha(f*g)+\beta(f*h),\ \varphi)$$

de unde rezultatul enunțat.

Scanned with OKEN Scanner

Observația 2. Dacă distribuțiile g și h au suporturile compacte, atunci $\alpha g+\beta h$ are deasemenea suportul compact, deci produsul $f*(\alpha g + \beta h)$ există și are loc proprietatea de distributivitate.

Exemplul 1. Fie $f, g \in K'(R^n)$ și $E(x) = e^{\alpha(a,\,x)} \in \mathcal{E}(R^n)$, $\alpha \in \Gamma$. Dacă $f * g$ există, atunci avem:

$$E(x)\,(f * g) = (E(x)f) * (E(x)g). \tag{8}$$

$\forall_{\varphi \in K(R^n)}$ putem scrie:

$$(E(x)\,(f * g),\ \varphi) = (f_x \times g_y,\ E(x+y)\,\varphi(x+y)).$$

Deoarece $E(x+y) = e^{\alpha(a,\,x+y)} = e^{\alpha(a,x)+\alpha(a,y)} = e^{\alpha(a,\,x)} \cdot e^{\alpha(a,\,y)}$ avem:

$$(E(x)(f * g),\ \varphi) = (e^{\alpha(a,\,x)} f_x \times e^{\alpha(a,\,y)} g_y,\ \varphi(x+y)) =$$

$$= (E(x)f * E(x)g,\ \varphi)$$

deci $E(x)\,(f * g) = E(x)f * E(x)g$.

În particular, pentru $n = 1$ și $a = 1$, $\alpha = i = \sqrt{-1}$, obținem:

$$e^{ix}(f * g) = e^{ix}f * e^{ix}g = (\cos x + i \sin x)f * [\cos x + i \sin x]g =$$

$$= (f \cos x + i f \sin x) * (g \cos x + i g \sin x).$$

Aplicînd proprietatea de distributivitate a produsului de convoluție, obținem:

$$e^{ix}(f * g) = (\cos x + i \sin x)\,(f * g) = (f \cos x * g \cos x -$$

$$- f \sin x * g \sin x) + i(f \sin x * g \cos x + f \cos x * g \sin x)$$

de unde formulele:

$$\cos x(f * g) = f \cos x * g \cos x - f \sin x * g \sin x \tag{9}$$

$$\sin x(f * g) = f \sin x * g \cos x + f \cos x * g \sin x.$$

Remarcăm că distributivitatea în cazul $n=1$ are loc și dacă $\operatorname{supp}(f, g) \subset (b, \infty)$.

PROPOZIȚIA 7. *Dacă $f, g \in K'(R^n)$ și $f * g$ există, avem:*

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}. \tag{10}$$

Demonstrație. Fie $A = \operatorname{supp} f$, $B = \operatorname{supp} g$. Pentru a demonstra propoziția este suficient să arătăm că pentru $\forall_{\varphi \in K(R^n)}$ cu $\operatorname{supp} \subset C_{R^n}(\overline{A+B})$ avem $(f * g,\ \varphi) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $(f*g,\ \varphi)=(f_x\times g_y,\ \varphi(x+y))$ și $\operatorname{supp}(f_x\times g_y)=A\times B$ iar $x+y\in\operatorname{supp}\varphi\subset C_{R^n}(A+B)$, rezultă din $x\in A$ și $y\in B$ că $x+y\in A+B$. Dar cum $(A+B)\cap\operatorname{supp}\varphi(x+y)=\Phi$ avem $(f*g,\ \varphi)=0$ pentru $\operatorname{supp}\varphi\subset C_{R^n}\overline{A+B}$).

Ținînd seamă că închiderea unei mulțimi este o mulțime închisă deducem că $C_{R^n}(\overline{A+B})$ este o mulțime deschisă, deci $f*g=0$ în $C_{R^n}(\overline{A+B})$, adică $\operatorname{supp}(f*g)\subset\overline{A+B}$.

Observația 3. Suma artimetică A_1+B_1 a mulțimilor A_1, $B_1\subset R^n$ este o mulțime închisă dacă A_1 este închisă iar B_1 compactă.

Dacă ambele mulțimi A_1 și B_1 sînt compacte atunci și suma A_1+B_1 este o mulțime compactă. Menționăm deasemenea că orice mulțime închisă coincide cu închiderea sa, adică $A=\bar{A}$.

Pe baza acestor observații și a propoziției precedente privind suportul produsului de convoluție, avem:

COROLARUL 2. *Dacă una din distribuțiile* $f,\ g\in K'(R^n)$ *are suport compact atunci* $\operatorname{supp}(f*g)\subset\operatorname{supp}f+\operatorname{supp}g$.

Într-adevăr, $f*g$ există și mulțimea $\operatorname{supp}f+\operatorname{supp}g$ este închisă, deci $\overline{\operatorname{supp}f+\operatorname{supp}g}=\operatorname{supp}f+\operatorname{supp}g$, de unde pe baza propoziției 7 avem rezultatul cerut.

În particular, dacă ambele distribuții au suporturile compacte atunci $\overline{\operatorname{supp}f+\operatorname{supp}g}=\operatorname{supp}f+\operatorname{supp}g=$compact, deci $\operatorname{supp}(f*g)\subset\operatorname{supp}f+\operatorname{supp}g=$compact.

COROLARUL 3. *Fie distribuțiile* $f,\ g\in K'(R)$ *avînd* $\operatorname{supp}f\subset[a,\ \infty)$ *și* $\operatorname{supp}g\subset[b,\ \infty)$. *Atunci avem:*

$$\operatorname{supp}(f*g)=[a+b,\ \infty).$$

Demonstrație. În baza propoziției 3 II.2.2. produsul de convoluție $f*g$ există. Aplicînd propoziția 7, avem:

$$\operatorname{supp}(f*g)\subset\overline{\operatorname{supp}f+\operatorname{supp}g}\subset[a,\ \infty)+[b,\ \infty)=[a+b,\ \infty).$$

Astfel de exemplu, dacă θ reprezintă distribuția lui Heaviside, avem: $\operatorname{supp}(\tau_a\theta*\tau_b\theta)\subset\operatorname{supp}\tau_a\theta+\operatorname{supp}\tau_b\theta=[a+b,\ \infty)$, deoarece $\operatorname{supp}\tau_a\theta=[a,\ \infty)$.

PROPOZIȚIA 8. *Dacă* $f,\ g,\ h\in K'(R)$ *și* $\operatorname{supp}(f,\ g,\ h)\subset[a,\ \infty)$ *atunci produsul de convoluție a acestor distribuții este asociativ.*

Demonstrație. În baza propoziției 3 II.2.2 există produsele: $f*(g*h)$, $(f*g)*h$ și $\underset{\varphi\in K'(R)}{\forall}$ avem:

$$(f*(g*h),\ \varphi)=(f_x\times(g*h)_y,\ \varphi(x+y))=((g*h)_y,\ (f_x,\ \varphi(x+y))).$$

Dar $(f_x,\ \varphi(x+y))\in C^\infty(R)$ în raport cu y, iar pentru $|y|$ suficient de mare $\operatorname{supp}\varphi(x+y)\cap\operatorname{supp}f=\Phi$ și în consecință pentru aceste valori ale lui y obținem $(f_x,\ \varphi(x+y))=0$. Deci $(f_x,\ \varphi(x+y))$ are suportul mărginit la dreapta și cum $(g*h)_y$ are suportul mărginit la stînga rezultă că supor-

Scanned with OKEN Scanner

turile lui $(g * h)_y$ și $(f_x, \varphi(x+y))$ au o intersecție mărginită. În consecință $((g * h)_y, (f_x, \varphi(x+y)))$ există și avem :

$$(f * (g * h), \varphi) = (f_x \times g_y \times h_z, \varphi(x + y + z)).$$

Analog obținem :

$$((f * g) * h, \varphi) = (f_x \times g_y \times h_z, \varphi(z + y + z))$$

de unde pe baza egalității a două distribuții avem proprietatea de asociativitate.

În concluzie, produsul de convoluție a mai multor distribuții, există, este comutativ și asociativ în următoarele condiții :

1° Suporturile tuturor distribuțiilor sînt compacte cu excepția a cel mult una.

2° Suporturile distribuțiilor sînt mărginite la stînga (dreapta) în cazul distribuțiilor din $K'(R)$.

Remarcăm că nerespectarea condițiilor relative la asociativitate poate duce la rezultate eronate. Astfel de exemplu, să considerăm distribuțiile din $K'(R)$, anume :

$$f_1 = (1 * \delta_0) * \theta, \quad f_2 = 1 * (\delta_0' * \theta),$$

unde θ, δ_0 sînt respectiv distribuțiile lui Heaviside și Dirac. Observăm că deoarece δ_0 are suport punctual, distribuția $1 * \delta_0'$ există și $1 * \delta_0' = (1)' * \delta_0 = 0$. Deci f_1 există și $f_1 = 0$.

Deasemeni $\delta_0' * \theta$ există și $\delta_0' * \theta = \theta' = \delta_0$. În consecință f_2 există și $f_2 = 1 * \delta_0 = 1$. Comparînd distribuțiile f_1 și f_2 observăm că f_2 se obține formal din f_1 prin aplicarea proprietății de asociativitate. Dar distribuțiile f_1 și f_2 nu se bucură de proprietatea de asociativitate deoarece cele trei distribuții nu au suporturile mărginite la stînga sau cel puțin două, suporturile compacte. Din acest motiv $f_1 \neq f_2$.

Spre deosebire de aceasta distribuția $f_3 = 1 * (\delta_0 * \delta_0')$ este comutativă și asociativă, deoarece două din cele trei distribuții au suport compact. Deci putem scrie :

$$f_3 = 1 * \delta_0 * \delta_0' = 1 * \delta_0' = (1)' = 0.$$

PROPOZIȚIA 9. *Fie $f, g \in K'(R^n)$ și D un operator diferențial liniar cu coeficienți constanți. Dacă $f * g$ există, atunci există și distribuțiile $Df * g$, $f * Dg$ și avem :*

$$D(f * g) = Df * g = f * Dg.$$

Demonstrație. Produsul $D\delta_0 * (f * g)$ există deoarece distribuția $D\delta_0$ are suport compact, δ_0 fiind distribuția lui Dirac concentrată în origine.

Evident $f * g$ există dacă una din distribuțiile f și g are suport compact sau ambele au suporturile mărginite la stînga (dreapta), în cazul cînd f și g sînt distribuții pe R. În aceste cazuri produsul $D\delta_0 * (f * g)$ este comutativ și asociativ.

Scanned with OKEN Scanner

În virtutea corolarului 1 II.2.2 și proprietății de asociativitate avem :

$$D\delta_0 * (f * g) = D(f * g) = (D\delta_0 * f) * g = Df * g.$$

Analog, pe baza comutativității produsului de convoluție avem :

$$D\delta_0 * (f * g) = D\delta_0 * (g * f) = Dg * f = f * Dg$$

de unde se obține rezultatul enunțat.

Menționăm că în general existența distribuțiilor $Df * g$ și $f * Dg$ nu implică egalitatea lor și nici existența produsului de convoluție $f * g$. Pentru a ilustra aceasta considerăm distribuțiile pe R, anume : $f = 1$, $g = \theta$ și $D = \frac{d}{dx}$. Atunci, fie $F_1 = Df * g = (1)' * \theta$; $F_2 = f * Dg = 1 * \theta'$ și $F_3 = f * g = 1 * \theta$, unde θ este distribuția lui Heaviside. Observăm că F_1 există și $F_1 = 0$, Deasemeni, deoarece $\theta' = \delta_0$, F_2 există și $F_2 = 1 * \delta_0 = 1$. Evident $F_1 \neq F_2$ iar F_3 nu există.

Exemplul 2. Fie $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $\square_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta$ și $\Box_a = \Delta - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}$, respectiv, operatorul lui Laplace, D'Alembert și Nicolescu. Atunci, deoarece, acești operatori sînt liniari și cu coeficienți constanți, $\forall\ f \in K'(R^n \times R)$ avem :

$$\Delta\delta_0 * f = \Delta f,\ \square_a\delta_0 * f = \square_a f$$

și

$$\Box_a\delta_0 * f = \Box_a f.$$

În particular, dacă considerăm funcția $f(x_1, x_2, \ldots, x_n = \frac{1}{r^{n-2}}$, $r = \|x\|^{\frac{1}{2}}$, aceasta fiind local integrabilă, definește o distribuție regulată și conform exemplului 2 din I.5., avem pentru $n \geqslant 3$:

$$\Delta\delta_0 * \frac{1}{r^{n-2}} = \Delta\frac{1}{r^{n-2}} = -(n-2)S_n\delta_0,$$

unde S_n reprezintă aria sferei de rază unitate din R^n. Pentru $n = 3$ obținem : $\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta_0$.

PROPOZIȚIA 10. *Fie τ_a, $a \in R^n$ operatorul de translație de vector a. Dacă $f, g \in K'(R^n)$ și $f * g$ există avem :*

$$\tau_a(f * g) = \tau_a f * g = f * \tau_a g.$$

Demonstrație. Distribuția $\tau_a\delta_0 = \delta_a$ este cu suport compact, anume punctul a. Aplicînd formula 7 din II.2.2 și urmînd raționamentul de la propoziția precedentă, obținem :

$$\tau_a\delta_0 * (f * g) = \tau_a(f * g) = (\tau_a\delta_0 * f) * g = \tau_a f * g.$$

Scanned with OKEN Scanner

Analog, pe baza comutativităţii produsului de convoluţie obţinem :

$$\tau_a\delta_0 * (f * g) = \tau_a\delta_0 * (g * f) = \tau_a g * f$$

de unde prin compararea relaţiilor avem formula cerută. Astfel, de exmplu, avem :

$$\tau_a\delta_0 * \tau_b\delta_0 = \delta_a * \delta_b = \tau_a(\tau_b)(\delta_0) = \delta_{a+b} = \tau_{a+b}\delta_0.$$

Similar putem scrie pentru distribuţia lui Heaviside în R^n :

$$\tau_a\theta * \tau_b\theta = \tau_{a+b}(\theta * \theta)$$

În particular, pentru $n=1$ obţinem :

$$\tau_a\theta * \tau_b\theta = \tau_{a+b}(x\theta), \text{ deoarece } \theta * \theta = x\theta.$$

PROPOZIŢIA 11. *Dacă* $f, g \in K'(R^n)$ *şi* $f * g$ *există, atunci simetria „*$\vee$*” faţă de origine are proprietatea :*

$$(f * g)^\vee = f^\vee * g^\vee. \tag{11}$$

Demonstraţie. $\forall_{\varphi \in K(R^n)}$ putem scrie :

$$((f * g)^\vee, \varphi) = (f * g, \varphi^\vee) = (f_x \times g_v, \varphi^\vee(x + y)) =$$

$$= (g_y, (f_x, \varphi^\vee(x + y))) = (g_y, (f_x^\vee, \varphi(x + y))) = (f^\vee * g, \varphi).$$

Ţinînd seamă de comutativitatea produsului de convoluţie obţinem rezultatul căutat.
Astfel de exemplu, avem $\forall_{f \in K'(R^n)}$: $f^\vee * \delta_0^\vee = (f * \delta_0)^\vee = f^\vee$.
Dacă $\psi \in C^\infty(R^n)$ şi $f \in K'(R^n)$ atunci :

$$(\psi f)^\vee = \psi^\vee f^\vee \tag{12}$$

care constituie un analog al formulei (11).

Într-adevăr, $\forall_{\varphi \in K(R^n)}$ avem :

$$((\psi f)^\vee, \varphi) = (\psi f, \varphi^\vee) = (f, \psi\varphi^\vee) = (f, (\psi^\vee\varphi)^\vee) =$$

$$= (f^\vee, \psi^\vee\varphi) = (f^\vee\psi^\vee, \varphi).$$

Cu aceasta formula (12) este demonstrată.

3. Regularizarea şi aproximarea distribuţiilor

Între proprietăţile importante ale produsului de convoluţie este şi proprietatea de continuitate, utilizată la aproximarea distribuţiilor.

PROPOZIŢIA 1. *Fie distribuţia* $f \in K'(R^n)$ *şi şirul de distribuţii* $(f_i)_{i \in N} \in K'(R^n)$ *cu proprietăţile* $f_i \to f$ *şi* $\operatorname{supp} f_i \subset \Omega$ *mărginit. Atunci* $\forall_{g \in K'(R^n)}$ *avem* $f_i * g \to f * g$.

Demonstrație. $\forall_{\varphi \in K(R^n)}$ avem :

$$(f_i * g,\ \varphi) = (f_{iy} \times g_x,\ \varphi(x+y)) = (f_{iy},\ (g_x,\ \varphi(x+y))).$$

Deoarece distribuția f_i are suport compact, în baza observației 1 I.5. putem scrie :

$$(f_i * g,\ \varphi) = (f_{iy},\ h(y)\,(g_x,\ \varphi(x+y))),\ \text{unde}\ h(y) \in K(R^n)$$

și are valoarea 1 pe o vecinătate compactă a mulțimii mărginite în care sînt conținute suporturile distribuțiilor f_i. În consecință $h(y)(g_x, \varphi(x+y)) \in K(R^n)$ și în baza convergenței distribuțiilor, avem :

$$(f_i * g,\ \varphi) \to (f,\ h(y)\,(g_x,\ (\varphi(x+y))) = (f * g,\ \varphi)$$

adică $f_i * g \to f * g$.

Remarcăm că proprietatea de continuitate a produsului de convoluție demonstrată mai sus se păstrează și în următoarele cazuri :

a) $f_i \to f$; $f_i, f \in K'(R^n)$; $g \in \mathscr{E}'(R^n) \Rightarrow f_i * g \to f * g$ (1)

b) $f_i \to f$; $g, f, f_i \in K'(R)$, supp f_i, supp $g \subset (a, \infty)$ sau $(-\infty, b)$

$$\Rightarrow f_i * g \to f * g$$

Într-adevăr, în cazul a) deoarece g este un suport compact $f_i * g$ există și $\forall_{\varphi \in K(R^n)}$ avem :

$$(f_i * g,\ \varphi) = (f_{ix},\ (g_y,\ \varphi(x+y))),$$

dar cum $(g_y, \varphi(x+y)) \in K(R^n)$, obținem :

$$(f_i * g,\ \varphi) \to (f_x,\ (g_y,\ \varphi(x+y))) = (f * g,\ \varphi)$$

Analog în cazul b), de exemplu, dacă f_i și g au suporturile mărginite la stînga (supp f_i, supp $g \subset (a, \infty)$) atunci $f_i * g$ există și $\forall_{\varphi \in K(R)}$ avem $(f_i * g, \varphi) = (f_{ix},\ (g_y,\ \varphi(x+y)))$. Dar $\psi(x) = (g_y,\ \varphi(x+y))$ este indefinit derivabilă în raport cu x și are suportul limitat la dreapta. În consecință $\Omega =$ supp $f_i \cap$ supp $(g_y, \varphi(x+y))$ este o mulțime mărginită fixă, deci în locul funcției $\psi(x)$ putem considera $h(x)\psi(x) \in K(R)$ unde $h \in K(R)$ are valoarea 1 pe o vecinătate compactă a lui Ω. În acest fel $(f_i * g, \varphi) = (f_{ix},\ \psi(x)) = (f_{ix},\ h(x)\ \psi(x))$, de unde $(f_i * g,\ \varphi) \to (f_x,\ h(x)\ \psi(x)) = (f * g,\ \varphi)$.

În particular, dacă $g \in K'(R^n)$ și $f_i = \delta_i \to \delta_0$, δ_i fiind un șir reprezentativ Dirac cu supp $\delta_i \subset \Omega$ mărginit, atunci $\delta_i * g \to \delta_0 * g = g$. Astfel, de exemplu, pentru δ_i putem considera atît șirul Landau $(L_i^*)_{i \in N}$ cît și familia de șiruri $(L_\lambda^*)_{\lambda \in R^+}$ definite prin exemplul 4 din I.4.5.

PROPOZIȚIA 2. *Fie* $f \in K'(R^n)$, $\alpha \in K(R^n)$ *și* D^p *un operator de derivare. Atunci* $f * \alpha \in C^\infty(R^n)$, $(f * \alpha)(x) = (f_t,\ \alpha(x-t))$ *și*

$$D^p(f * \alpha)(x) = (D^p f_t,\ \alpha(x-t)) = (f_t,\ D_x^p\, \alpha(x-t)).$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Fie $\varphi \in K(R^n)$. Deoarece α are suport compact convoluția $f * \alpha$ există și avem :

$$(f * \alpha,\ \varphi) = (f_t \times \alpha(u),\ \varphi(t+u)) = (f_t,\ (\alpha(u),\ \varphi(t+u))) =$$

$$= \left(f_t, \int_{R^n} \alpha(u)\varphi(t+u)\,du\right) = \left(f_t, \int_{R^n} \alpha(x-t)\varphi(x)\,dx\right) =$$

$$= (f_t,\ (\varphi(x),\ \alpha(x-t))) = (f_t \times \varphi(x),\ \alpha(x-t)) =$$

$$= (\varphi(x), (f_t,\ \alpha(x-t))) = \int_{R^n} (f_t,\ \alpha(x-t))\varphi(x)\,dx = ((f_t, \alpha(x-t)), \varphi)$$

deci $(f * \alpha)(x) = (f_t,\ \alpha(x-t))$ și evident este o funcție de x. Pentru a arăta că funcția $(f*\alpha)(x) = \psi(x)$ este indefinit derivabilă, avem pentru x fixat și $R^n \ni h = (0, 0, , \ldots, 0,\ h_i, 0, 0, , \ldots, , 0) > 0$

$$\frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h_i} = \left(f_t,\ \frac{\alpha(x+h-t) - \alpha(x-t)}{h_i}\right).$$

Pentru $h_i \to 0$ deoarece f_t este o funcțională continuă în $K(R^n)$ și

$$\frac{\alpha(x+h-t) - \alpha(x-t)}{h_i} \to \frac{\partial \alpha(x-t)}{\partial x_i}$$

în sensul convergenței din spațiul $K(R^n)$ obținem :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f*\alpha)(x) = \left(f_t,\ \frac{\partial \alpha(x-t)}{\partial x_i}\right) = \left(f_t,\ -\frac{\partial \alpha(x-t)}{\partial t_i}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t_i} f_t,\ \alpha(x-t)\right),$$

de unde

$$D^p(f*\alpha)(x) = (f_t,\ D_x^p \alpha(x-t)) = (D^p f_t,\ \alpha(x-t)).$$

Cu aceasta propoziția este demonstrată.

Menționăm că funcția $f*\alpha \in C^\infty(R^n)$ se numește regularizata distribuției f, iar $\alpha \in K(R^n)$ funcția regularizatoare. În particular, dacă $f \in \mathscr{E}'(R^n)$, deci are suport compact, atunci funcția $f*\alpha$ are suport compact deoarece $\operatorname{supp} f*\alpha \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} \varphi$ și $\operatorname{supp} f$, $\operatorname{supp} \varphi$ sînt mulțimi compacte, deci $f*\alpha \in K(R^n)$.

Corolarul 1. *Dacă* $f \in \mathscr{E}'(R^n)$ *și* $\alpha \in \mathscr{E}(R^n)$ *atunci avem :*

$$(f*\alpha) \in C^\infty(R^n) \text{ și } (f*\alpha)(x) = (f_t,\ \alpha(x-t)).$$

Într-adevăr, aceasta rezultă din faptul că $\forall_{\varphi \in K(R^n)}$ avem :

$$(f*\alpha,\ \varphi) = (f_t \times \alpha(u),\ \varphi(t+u)) = (f_t,\ (\alpha(u),\ \varphi(t+u))) =$$

$$= (f_t,\ h(t)\,(\alpha(u),\ \varphi(t+u))),$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $h \in K(R^n)$ și are valoarea egală cu unu pe o vecinătate compactă a suportului distribuției $f \in \mathscr{E}'(R^n)$.

PROPOZIȚIA 3. *Dacă* $f \in K'^m(R^n)$ *și* $\alpha \in K^m(R^n)$ *atunci* $f * \alpha$ *este o funcție continuă pe* R^n *și* $(f*\alpha)(x) = (f_t, \alpha(x-t))$.

Demonstrație. Convoluția $(f*\alpha)(x)$ există deoarece funcția α are suport compact. Pentru x fixat $\alpha(x-t) \in K^m(R^n)$ și $\forall\ h \in R^n$ avem:

$$(f*\alpha)(x+h) - (f*\alpha)(x) = (f_t, \alpha(x+h-t) - \alpha(x-t)).$$

Pe baza convergenței din spațiul K^m pentru $h \to 0$ avem $\alpha(x+h-t) - \alpha(x-t) \overset{u}{\Rightarrow} 0$ pe orice compact împreună cu toate derivatele pînă la ordinul m inclusiv. Deci $(f*\alpha)(x+h) - (f*g)(x) \to 0$, adică $f*\alpha$ este o funcție continuă pe R^n.

COROLARUL 2. *Dacă* $f \in K'^m(R^u)$ *și* $\alpha \in K^{m+p}(R^n)$, *atunci* $f*\alpha \in C^p(R^n)$.

Într-adevăr, pentru $h \to 0$ avem $D^l\alpha(x+h-t) - D^l\alpha(x-t) \overset{u}{\Rightarrow} 0$ pentru $|l| \leqslant p$. În baza propoziției precedente rezultă $f*\alpha \in C^p(R^n)$, adică funcția $f*\alpha$ admite derivate continue pe R^n pînă la ordinul p inclusiv.

Exemplul 1. Fie $f \in \mathscr{E}'(R^n)$ și $\alpha \equiv 1$ pe R^n. Atunci $f*1 = (f, 1) = \int f$.

Într-adevăr, deoarece f este o distribuție cu suport compact iar $\alpha \in \mathscr{E}(R^n)$ avem: $f*1 = (f_t, 1) = (f, 1)$. Această convoluție se numește integrala din distribuția f, deci $\int f = f*1 = (f,\ 1)$. Dacă f este o distribuție de tip funcție cu suport compact atunci evident $\int f = (f, 1) = \int_{R^n} f(x)\,dx$. În particular, dacă D^p este un operator de derivare obținem:

$$D^p f * 1 = D^p(f*1) = 0, \text{ adică } \int D^p f = 0.$$

Exemplul 2. Fie $f \in \mathscr{E}'(R)$ și $\alpha = P_n \in \mathscr{E}(R)$ un polinom de gradul n. Are loc formula:

$$(f*P_n)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}(f_t,\ P_n^{(k)}(-t)).$$

Demonstrație. În baza formulei lui Taylor putem scrie:

$$P_n(x-t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(-t)}{k!} x^k, \text{ de unde}$$

$$f*P_n(x) = (f_t,\ P_n(x-t)) = \left(f_t,\ \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(-t)x^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}(f_t, P_n^{(k)}(-t)).$$

În consecință $f*P_n(x)$ reprezintă un polinom de gradul n ca și funcția regularizatoare, anume polinomul P_n.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 3. Dacă $f \in \mathcal{E}'(R^n)$ și $\alpha = E(x) = e^{(a,\ x)}$, *a.* $x \in R^n$ atunci avem :

$$f * E(x) = (f,\ E^{\vee})E(x).$$

Într-adevăr, deoarece $E(x) \in \mathcal{E}(R^n)$ și $E^{\vee}(x) = e^{-(a,\ x)}$ putem scrie în baza formulei 8 din II.2.2.

$$f * E(x) = E(x)\left(\frac{1}{E(x)} f * 1\right) = E(x)\left(\frac{f}{E},\ 1\right) = E(x)\,(E^{\vee} f,\ 1) =$$

$$= E(x)\,(f,\ E^{\vee}) \text{ pentru că } E^{\vee} = \frac{1}{E}.$$

Deci produsul de convoluție $f * E$ este tot o exponențială proporțională cu $E(x)$, factorul de proporționalitate fiind numărul $(f,\ E^{\vee})$.

DEFINIȚIA 1. Numim urma în origine a funcției continue $f : R^n \to \Gamma$, numărul $f(0)$ notat prin :

$$\text{Tr. } f(x) = f(0).$$

Conform propoziției 2 (II.2.3), dacă $f \in K'(R^n)$ și $\varphi \in K(R\ )$ avem :

$$(f * \varphi)\,(x) = (f_t,\ \varphi(x - t)) \in C^{\infty}(R^n)$$

deci

$$\text{Tr.}(f * \varphi) = (f * \varphi)\,(0) = (f,\ \varphi^{\vee}) \tag{1}$$

În consecință avem :

$$\text{Tr.}\,(f^{\vee} * \varphi) = \text{Tr}(f * \varphi^{\vee}) = (f,\ (\varphi^{\vee})^{\vee}) = (f,\ \varphi) \tag{2}$$

PROPOZIȚIA 4. *Fie* $f \in K'(R^n)$. *Condiția necesară și suficientă pentru ca distribuția* f *să fie nulă* $(f = 0)$, *este ca* $\forall\ \varphi \in K(R^n)$ *să avem* $f * \varphi = 0$.

Într-adevăr, dacă $f = 0$ atunci $\forall\ \varphi \in K(R^n)$ avem :

$(f,\ \varphi) = 0 = \text{Tr.}\,(f * \varphi^{\vee}) \Rightarrow f * \varphi = 0$. Reciproc, dacă $\forall\ \varphi \in K(R^n)$ avem $f * \varphi = 0$ atunci conform formulei (2), deoarece și $f * \varphi^{\vee} = 0$, obținem $(f,\ \varphi) = 0$, deci $f = 0$.

Datorită formulei (2) produsul de convoluție a două distribuții se poate prezenta într-o nouă formă.

PROPOZIȚIA 5. *Dacă* $f, g \in K'(R^n)$, $\varphi \in K(R^n)$ *și produsul* $f * g$ *există, atunci are loc relația :*

$$(f * g,\ \varphi) = (f,\ g^{\vee} * \varphi) = (g,\ f^{\vee} * \varphi). \tag{3}$$

Demonstrație. Deoarece $\varphi \in K(R^n)$, produsul de convoluție $(f * g) * \varphi$ există, este comutativ și asociativ, aceasta fie că una din distribuțiile f sau g are suport compact, fie că ambele au suporturile limitate la stînga (dreapta).

Scanned with OKEN Scanner

În consecință, putem scrie:

$$f * g,\ \varphi) = \mathrm{Tr.}[(f * g) * \varphi^{\vee}] = \mathrm{Tr.}[f * (g * \varphi^{\vee})] =$$

$$= \mathrm{Tr.}[f * (g^{\vee} * \varphi)^{\vee}] = (f,\ g^{\vee} * \varphi)$$

datorită relației:

$$(g^{\vee} * \varphi)^{\vee} = (g^{\vee})^{\vee} * \varphi^{\vee} = g * \varphi^{\vee}.$$

În baza comutativității produsului de convoluție obținem rezultatul cerut.

Formula obținută ne arată că produsul de convoluție $f * g$ a două distribuții este cunoscut dacă cunoaștem una din funcțiile:

$$f^{\vee} * \varphi \text{ sau } g^{\vee} * \varphi,\ \varphi \in K(R^n).$$

Proprietățile regularizante ale produsului de convoluție puse în evidență, permit aproximarea distribuțiilor prin funcții indefinit derivabile. Astfel dacă considerăm familia regularizantă de șiruri Dirac, $\rho_\varepsilon(\varepsilon > 0)$ definite prin relația (7) din I.4.2, atunci $\forall_{f \in K'(R^n)}$ deoarece $\rho_\varepsilon \to \delta_0$ și supp $\rho_\varepsilon \to 0$ pentru $\varepsilon \to 0$, conform propozițiilor 1 și 2 avem:

$$f * \rho_\varepsilon = f_\varepsilon \overset{K'}{\to} f, \text{ unde } f_\varepsilon \in C^\infty(R^n).$$

Funcția f_ε indefinit derivabilă, ce converge în spațiul $K'(R^n)$ către distribuția $f \in K'(R^n)$, reprezintă o aproximare a acestei distribuții.

Alte posibilități de aproximare a distribuțiilor nu numai prin funcții ci și prin distribuții de un anumit tip sînt, de exemplu, prezentate în [1] și [9].

În cele ce urmează vom arăta modul de aproximare a unei distribuții cu suport compact prin combinații liniare de distribuții Dirac.

Fie $f \in \mathscr{E}(R)$, supp $f = \Omega$ și numerele $a_k \in \Omega (k = 1, 2, \ldots, n-1)$. Asociem distribuției f distribuția f_n definită prin relația:

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} C_k \delta_{a_k}, \tag{4}$$

unde $C_k \in \Gamma$ sînt constante reale sau complexe.

Pentru ca distribuția f_n să constituie o aproximare a distribuției f vom impune ca distribuțiile f și f_n să coincidă pe mulțimea polinoamelor de grad $\leqslant n - 1$.

Notînd cu $\mathscr{P}$ mulțimea polinoamelor de grad cel mult $n-1$ și prin P_{n-1} un element al mulțimii, avem:

$$(f,\ P_{n-1}) = (f_n,\ P_{n-1}) \tag{5}$$

adică

$$(f - f_n,\ P_{n-1}) = 0, \quad \forall_{P_{n-1} \in \mathscr{P}}, \tag{5'}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (5′) rezultă condițiile:

$$(f - f_n, x^j) = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \tag{6}$$

Remarcăm că $P_{n-1} \in \mathscr{E}(R)$, deci relațiile (5) și (6) au sens.

PROPOZIȚIA 6. *Dacă* $a_k \in \Omega$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sînt distincte, *atunci distribuția* f_n *este unică.*

Demonstrație. În baza condițiilor (6) avem:

$$(f, x^j) = \sum_{k=1}^{n} C_k a_K^j \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{7}$$

Deoarece determinantul acestui sistem de n ecuații liniare cu n necunoscute este determinantul Δ al lui Vandermonde avem

$$\Delta = \prod_{i>J} (a_i - a_J) \neq 0\,; \; i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

În consecință, constantele $C_k (k=1, 2, \ldots, n)$ sînt unic determinate.

Pentru studiul convergenței șirului de distribuții f_n în spațiul $\mathscr{E}'(R)$, fie r_{n-1} polinomul de interpolare a lui $\varphi \in \mathscr{E}(R)$ de gradul $n-1$ corespunzător nodurilor $a_k (k=1, 2, \ldots, n)$.

Atunci, evident, $r_{n-1}(a_k) = \varphi(a_k)$, $k=1, 2, \ldots, n$ și în consecință, ținînd seama de (5) obținem:

$$(f_n, \varphi) = \sum_{k=1}^{n} C_k \varphi(a_k) = \sum_{k=1}^{n} C_k r_{n-1}(a_k) = (f_n, r_{n-1}) = (f, r_{n-1}).$$

PROPOZIȚIA 7. *Dacă* $r_{n-1} \to \varphi$ *în* $\mathscr{E}(R)$ *atunci* $f_n \to f$ *în* $\mathscr{E}'(R)$.

Demonstrație. Evident, convergența polinomului de interpolare r_{n-1} depinde de funcția $\varphi \in \mathscr{E}(R)$ și de nodurile de interpolare a_k.

Avem astfel:

$$(f_n - f, \varphi) = (f_n, \varphi) - (f, \varphi) = (f, r_{n-1}) - (f, \varphi) = (f, r_{n-1} - \varphi).$$

Deoarece $r_{n-1} - \varphi \in \mathscr{E}(R)$ și conform ipotezei

$$r_{n-1} - \varphi \to 0 \text{ în } \mathscr{E}(R) \text{ obținem:}$$

$f_n - f \to 0$ în $\mathscr{E}'(R)$, deci distribuția f_n este o aproximație a distribuției f.

Pentru evaluarea restului notăm:

$$R_n = (f_n - f, \varphi), \quad \varphi \in \mathscr{E}(R).$$

Deoarece $f_n - f \in \mathscr{E}'(R)$ atunci există produsul

$$(f_n - f) * x_+^n, \text{ unde } x_+^n = \theta x^n.$$

Dacă $h \in K(R)$ şi $h=1$ pe o vecinătate compactă a suportului distribuţiei f, avem :

$$((f_n - f) * x_+^m,\ (h\varphi)^{(m+1)}) = (-1)^{m+1}((f_n - f) * (x_+^m)^{(m+1)},\ h\varphi)$$

unde $m \in N$. Derivînd în sensul distribuţiilor obţinem $(x_+^m)^{(m+1)} = m!\,\delta_0$ şi în consecinţă pentru restul R_n obţinem expresia :

$$R_n = \frac{(-1)^{m+1}}{m!}((f_n - f) * x_+^m,\ (h\varphi)^{(m+1)}).$$

Astfel de exemplu pentru aproximarea integralei :

$$I = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$$

unde F este o funcţie de clasa $C^\infty(R)$, considerăm distribuţia $f \in \mathscr{E}'(R)$ anume :

$$f = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Cu ajutorul acestei distribuţii cu suport compact integrala definită se exprimă sub forma :

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = (f, F) = (f, hF)$$

$h \in K(R)$ şi $h=1$ pe o vecinătate compactă conţinînd pe $[a, b]$. Aproximînd distribuţia f prin $f_n = \sum_{k-1}^{n} C_k \delta_{a_k}$ corespunzătoare nodurilor distincte $a_k \in [a, b]$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, vom obţine pentru integrala considerată o formulă aproximativă de calcul :

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = (f, F) \approx (f_n, F) = \sum_{k=1}^{n} C_k F(a_k).$$

Astfel dacă considerăm nodurile $a_1 = a$, $a_2 = \dfrac{a+b}{2}$, $a_3 = b$ şi notăm : $2h = b - a$ atunci obţinem pentru distribuţia f_n expresia :

$$f_3 = C_1\delta_{a_1} + C_2\delta_{a_2} + C_3\delta_{a_3} = C_1\delta_a + C_2\delta_{a+h} + C_3\delta_b.$$

Coeficienţii C_1, C_2, C_3 se determină din sistemul de ecuaţii :

$$(f, 1) = \int_a^b \mathrm{d}x = b - a = C_1 + C_2 + C_3$$

$$(f, x) = \int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{b^2 - a^2}{2} = C_1 a + C_2 a_2 + C_3 b$$

$$(f, x^2) = \int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = \frac{b^3 - a^3}{3} = C_1 a^2 + C_2 a_2^2 + C_3 b^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Determinantul sistemului este $\Delta = 2h^3$. Rezolvînd sistemul de ecuații obținem :

$$C_1 = \frac{h}{3}, \quad C_2 = \frac{4h}{3}, \quad C_3 = \frac{h}{3}$$

de unde formula aproximativă :

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \simeq \frac{h}{3}\left[F(a) + 4F\left(\frac{a+b}{2}\right) + F(b)\right]$$

care, evident, constituie formula lui Simpson corespunzătoare celor 3 noduri.

4. Convoluția distribuțiilor depinzînd de un parametru

Studiul unor probleme de fizică matematică necesită considerarea distribuțiilor depinzînd de un parametru. Astfel dacă pentru $\forall\ t \in T \subset R$ putem asocia o singură distribuție $f_t \in K'(R^n)$ atunci spunem că distribuția f_t depinde de parametrul $t \in T$. Remarcăm că distribuția f_t pe R^n, dacă $t \in R$ poate fi uneori considerată ca o distribuție pe spațiul $R^n \times R$. Această nouă distribuție va fi notată $f(x, t)$ și evident t nu mai are caracterul de parametru ci împreună cu $x \in R^n$ va reprezenta punctul generic $(x\,;\,t) = (x_1, \ldots, x_n\,;\,t) \in R^n \times R$ al spațiului R^{n+1}. Uneori în loc de $f_t(x)$ se notează $f(x, t)$, cînd aceasta nu conduce la confuzii.

Definiția 1. Spunem că distribuția $f \in K'(R^n)$ este limita distribuției $f_t \in K'(R^n)$, t_0, $t \in T \subset R$ pentru $t \to t_0$, dacă $\forall\ \varphi \in K(R^n)$ avem $\lim\limits_{t \to t_0} (f_t, \varphi) = (f, \varphi)$.

În acest caz vom nota $\lim\limits_{t \to t_0} f_t = f$.

Definiția 2. Spunem că distribuția $f_t \in K'(R^n)$, $t \in T \subset R$ este continuă în raport cu parametrul t în domeniul T, dacă $\forall\ t_0 \in T$ avem $\lim\limits_{t \to t_0} f_t = f$.

Fie $\varphi \in K(R^n)$ și distribuția $f_t \in K'(R^n)$, $t \in R$. Atunci $(f_t, \varphi) = \psi_1(t)$ este o funcție definită pe R.

În ipoteza că distribuția $f_t \in K'(R^n)$ poate fi considerată ca o distribuție $f(x, t)$ pe R^{n+1}, adică $f(x, t) \in K'(R^{n+1})$, definim distribuția :

$$(f(x, t),\ \varphi) \in K'(R), \quad \varphi \in K(R^n) \tag{1}$$

prin formula :

$$((f(x, t),\ \varphi),\ \psi) = (f(x, t),\ \varphi(x)\ \psi(t)), \quad \varphi \in K(R^n), \quad \psi \in K(R) \tag{2}$$

Remarcăm că această formulă se adoptă în general oricare ar fi distribuția $f(x, t) \in K'(R^{n+1})$.

Propoziția 1. *Dacă* $f(x, t) \in K'(R^{n+1})$, *atunci* $\forall\ \varphi \in K(R^n)$ *avem* :

$$\left(\frac{\partial^\alpha f(x, t)}{\partial t^\alpha},\ \varphi(x)\right) = \frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha}(f(x, t),\ \varphi(x))\,;\quad \alpha \in N.$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Fie $\psi(t) \in K(R)$. Aplicînd regula de derivare a distribuțiilor pe R^{n+1} și R putem scrie:

$$\left(\left(\frac{\partial^\alpha f(x,t)}{\partial t^\alpha}, \varphi(x)\right), \psi(t)\right) = \left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha}, \varphi\psi\right) = (-1)^\alpha \left(f(x,t), \varphi \frac{\mathrm{d}^\alpha \psi}{\mathrm{d}t^\alpha}\right) =$$

$$= (-1)^\alpha \left((f(x,t), \varphi), \frac{\mathrm{d}^\alpha \psi}{\mathrm{d}t^\alpha}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha}(f(x,t), \varphi), \psi\right)$$

de unde pe baza egalității a două distribuții pe R, obținem rezultatul enunțat.

PROPOZIȚIA 2. *Fie distribuțiile f_t, $g \in K'(R^n)$, $t \in T \subset R$ fiind un parametru. Dacă $\frac{\partial f}{\partial t}$ și $f_t * g$ există, atunci avem formula:*

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_t(x) * g(x)) = \frac{\partial f_t(x)}{\partial t} * g(x). \tag{3}$$

Într-adevăr, $\forall_{\varphi \in K(R^n)}$ avem:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f_{t+\Delta t}(x) - f_t(x)}{\Delta t},$$

unde limita se consideră în sensul distribuțiilor. În consecință putem scrie:

$$((f_t * g)(x, t + \Delta t) - (f_t * g)(x, t), \varphi(x)) = ([f_{t+\Delta t}(x) - f_t(x)] * g, \varphi(x))$$

deci

$$\left(\frac{1}{\Delta t}[f_{t+\Delta t}(x) * g(x) - f_t(x) * g(x)], \varphi(x)\right) = \left(\frac{f_{t+\Delta t}(x) - f_t(x)}{\Delta t} * g(x), \varphi(x)\right).$$

Pentru $\Delta t \to 0$, în baza continuității produsului de convoluție, obținem formula cerută.

Observația 1. În baza proprietății de continuitate a produsului de convoluție (propoziția 1 din II.2.3) dacă $\frac{\partial f_t}{\partial t}$ există $\forall_{t \in T \subset R}$, iar distribuțiile f_t, g îndeplinesc una din condițiile:

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}_1)\ f_t \in \mathscr{E}'(R^n), \quad \forall_{t \in T \subset R} \\ &\mathrm{i}_2)\ g \in \mathscr{E}'(R^n) \end{aligned} \tag{4}$$

$\mathrm{i}_3)$ $f_t, g \in K'(R)$ și $\operatorname{supp} f_t$, $\operatorname{supp} g \subset (a, \infty)$ sau $(-\infty, b)$ $\forall_{t \in T \subset R}$

atunci formula (3) rămîne valabilă.

În particular, dacă considerăm $f_t(x) = \varphi(x, t) \in K(R^{n+1})$, atunci $\forall_{g \in K'(R^n)}$ în baza formulei (3) obținem:

$$\frac{\partial}{\partial t}[g(x) \underset{(x)}{*} \varphi(x, t)] = g(x) \underset{(x)}{*} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} \tag{5}$$

t considerîndu-se parametru.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece pentru $t \in R$, fixat, $\varphi(x, t) \in K(R^n)$, deducem că produsele de convoluţie există şi reprezintă funcţii indefinit derivabile în R^{n+1}, deci $g(x) \underset{(x)}{*} \dfrac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} \in C^\infty(R^{n+1})$.

Dacă distribuţia $g \in \mathscr{E}'(R^n)$ atunci $g \underset{(x)}{*} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \in K(R^{n+1})$.

DEFINIŢIA 3. Fie distribuţiile $f(x, t) \in K'(R^{n+1})$, $g(x) \in \mathscr{E}'(R^n)$. Distribuţia

$$f(x, t) \underset{(x)}{\circledast} g(x) \in K'(R^{n+1}) \tag{6}$$

definită prin formula:

$$(f(x, t) \underset{(x)}{\circledast} g(x), \varphi(x, t)) = (f(x, t), g^\vee \underset{(x)}{\circledast} \varphi(x, t)), \quad \underset{\varphi \in K(R^{n+1})}{\forall} \tag{7}$$

se va numi produs de convoluţie parţial în raport cu variabila x al distribuţiilor $f(x, t)$ şi g şi se va nota „$\underset{(x)}{\circledast}$”.

Justeţea acestei definiţii rezultă din faptul că distribuia g, avînd suport compact, atunci şi simetrica $g^\vee$ are suport compact şi în consecinţă $g^\vee \underset{(x)}{\circledast} \varphi(x, t) \in K(R^{n+1})$. Deci membrul drept există $\underset{f \in K'(R^{n+1})}{\forall}$ de unde deducem că $f(x, t) \underset{(x)}{\circledast} g(x)$ reprezintă o distribuţie definită pe $K(R^{n+1})$ prin formula (7). Din formula (7) rezultă că distribuţia (6) există dacă cel puţin unul din factori are suport compact. Astfel dacă $g \in K'(R^n)$ atunci $g^\vee \underset{(x)}{*} \varphi(x, t) \in C^\infty(R^{n+1})$, iar expresia (7) există deoarece în acest caz $f(x, t) \in \mathscr{E}'(R^{n+1})$.

Evident nu vom face distincţie între distribuţiile $f(x, t) \underset{(x)}{\circledast} g(x)$ şi $g(x) \underset{(x)}{\circledast} f(x, t)$. Modul lor de acţiune este dat de (7). Cu alte cuvinte, admitem prin definiţie comutativitatea noului produs de convoluţie. Proprietăţile sale sînt puse în evidenţă prin propoziţiile enunţate mai jos.

PROPOZIŢIA 3. *Fie* $f(x, t) \in K'(R^{n+1})$, $g(x) \in K'(R^n)$. *Dacă produsul* $f(x, t) \underset{(x)}{\circledast} g(x)$ *există şi* D_x^α *este un operator de derivare în raport cu variabila* x, *atunci au loc formulele*:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \underset{(x)}{\circledast} g(x) = \frac{\partial}{\partial t} (f(x, t) \underset{(x)}{\circledast} g(x)) \tag{8}$$

$$D_x^\alpha f(x, t) \underset{(x)}{\circledast} g(x) = D_x^\alpha (f(x, t) \underset{(x)}{\circledast} g(x)) = f(x, t) \underset{(x)}{\circledast} D_x^\alpha g(x). \tag{9}$$

Demonstraţie. Pentru stabilirea proprietăţii (8), $\underset{\varphi(x, t) \in K(R^{n+1})}{\forall}$ avem:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \underset{(x)}{\circledast} g, \ \varphi\right) = \left(\frac{\partial f(x, t)}{\partial t}, \ g^\vee \underset{(x,t)}{*} \varphi\right) = -\left(f(x, t), g^\vee \underset{(x)}{*} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) =$$

$$= -\left(f(x, t) \underset{(x)}{\circledast} g(x), \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} (f(x, t) \underset{(x)}{\circledast} g), \ \varphi\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde pe baza egalității distribuțiilor rezultă formula (8). Analog putem scrie :

$$(D_x^\alpha f(x, t) \underset{(x)}{\circledast} g, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D_x^\alpha(g^\vee \underset{(x)}{*} \varphi)) =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}(f, g^\vee \underset{(x)}{*} D_x^\alpha \varphi) = (D_x^\alpha(f(x, t) \underset{(x)}{\circledast} g), \varphi)$$

de unde rezultă prima parte a formulei (9). Pentru a doua parte a formulei avem :

$$(f(x, t) \underset{(x)}{\circledast} D_x^\alpha g, \varphi) = (f(x, t), (D_x^\alpha g)^\vee \underset{(x)}{*} \varphi) = (f(x, t), (D_x^\alpha g \underset{(x)}{*} \varphi^\vee)^\vee) =$$

$$= (f(x, t), (g \underset{(x)}{*} D_x^\alpha \varphi^\vee)^\vee = (f(x, t), g^\vee \underset{(x)}{*} (D_x^\alpha \varphi^\vee)^\vee).$$

Conform formulei (17) din I.5, deoarece $D_x^\alpha \varphi^\vee = (-1)^{|\alpha|}(D_x^\alpha \varphi)^\vee$, obținem :

$$(f(x, t) \underset{(x)}{\circledast} D_x^\alpha g, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f(x, t), g^\vee \underset{(x)}{*} D_x^\alpha \varphi) =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}(f(x, t) \underset{(x)}{\circledast} g, D_x^\alpha \varphi) = (D_x^\alpha [f(x, t) \underset{(x)}{\circledast} g], \varphi).$$

Pe baza egalității a două distribuții rezultă

$$D_x^\alpha [f(x, t) \underset{(x)}{\circledast} g(x)] = f(x, t) \underset{(x)}{\circledast} D_x^\alpha g(x)$$

cu care formula (9) este complet demonstrată.

Exemplul 1. Fie $f(x, t) \in K'(R^{n+1})$ și $\delta_0 \in K'(R^n)$ distribuția lui Dirac. Atunci avem :

$$f(x, t) \underset{(x)}{\circledast} \delta_0(x) = f(x, t) \tag{10}$$

Într-adevăr, deoarece $\delta_0^\vee = \delta_0$, avem $\underset{\varphi(x, t) \in K(R^{n+1})}{\forall}$:

$$(f(x, t) \underset{(x)}{\circledast} \delta_0(x), \varphi(x, t)) = (f(x, t), \delta_0^\vee \underset{(x)}{*} \varphi(x, t)) =$$

$$= (f(x, t), \delta_0 \underset{(x)}{*} \varphi(x, t)) = (f(x, t), \varphi(x, t))$$

de unde formula (10).

PROPOZIȚIA 4. *Fie distribuțiile* $f(x, t) \in K'(R^{n+1})$, $g \in K'(R^n)$. *Dacă produsul de convoluție* $f(x, t) \underset{(x)}{\circledast} g(x)$ *există atunci* $\underset{\varphi \in K(R^n)}{\forall}$ *are loc formula :*

$$\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} f(x, t) \underset{(x)}{\circledast} g(x), \varphi(x)\right) = \frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha}(f(x, t) \underset{(x)}{\circledast} g(x), \varphi(x)). \tag{11}$$

Într-adevăr, în baza propoziției 1 și formulei (8) rezultă relația (11).

Scanned with OKEN Scanner

Observaţia 2. Un analog al formulei (11) are loc şi pentru distribuţiile depinzînd de un parametru. Astfel se arată uşor relaţia :

$$\left(\frac{\partial f_t(x)}{\partial t} * g(x), \varphi(x)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f_t(x) * g(x), \varphi(x)\right) \tag{12}$$

unde $f_t \in K'(R^n)$, $g \in K'(R^n)$ astfel încît $f_t * g$ să existe. În ce priveşte produsul direct şi noul produs de convoluţie putem enunţa :

PROPOZIŢIA 5. *Fie distribuţiile* $f \in K'(R^n)$, $g \in K'(R)$ *şi* $h \in \mathscr{E}'(R^n)$. *Atunci avem formula :*

$$(f_x \times g_t) \underset{(x)}{\circledast} h_x = (f * h)_x \times g_t. \tag{13}$$

Demonstraţie Conform formulei de definiţie (7), $\underset{\varphi \in K(R^{n+1})}{\forall}$ putem scrie :

$$((f_x \times g_t) \underset{(x)}{\circledast} h_x, \ \varphi(x, t)) = (f_x \times g_t, \ h^{\vee} \underset{(x)}{*} \varphi) = (g_t, (f_x, \ h^{\vee} \underset{(x)}{*} \varphi)).$$

Dar conform formulei (3) din II.2.3., avem :

$$(f_x, \ h^{\vee} \underset{(x)}{*} \varphi) = ((f * h)_x, \ \varphi(x, t)).$$

În consecinţă vom obţine :

$$((f_x \times g_t) \underset{(x)}{\circledast} h_x, \varphi(x, t)) = (g_t, ((f * h)_x, \varphi(x, t))) = ((f * h)_x \times g_t, \varphi(x, t))$$

de unde deducem formula (13).

Exemplul 2. Fie distribuţiile $f \in K'(R^n)$, $\delta_0 \in K'(R^{n+1})$. Atunci avem formula :

$$\delta(x, t) \underset{(x)}{\circledast} f(x) = f(x) \times \delta(t) \tag{14}$$

Într-adevăr, deoarece $\delta(x, t) = \delta_x \times \delta_t$ putem scrie :

$$\delta(x, t) \underset{(x)}{\circledast} f(x) = (\delta_x \times \delta_t) \underset{(x)}{\circledast} f(x) = (\delta_x * f(x)) \times \delta_t = f(x) \times \delta(t).$$

Remarcăm că produsul de convoluţie parţial există deoarece $\delta(x, t)$ are suport compact.

În legătură du distribuţiile depinzînd de un parametru R. Cristescu a introdus în [16] noţiunea de familie compozabilă de distribuţii, cu ajutorul căreia a definit o operaţie de compunere ce generalizează produsul de convoluţie.

Fie distribuţiile $g_t \in K'(R^n)$ depinzînd de parametrul $t \in R^n$.

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 4. Familia $G = \{g_t\}_{t\in R^n}$ de distribuții se va numi compozabilă dacă satisfac următoarele condiții:

$$1^\circ) \quad \forall_{\varphi\in K(R^n)} \quad (g_t, \varphi) = \psi(t) \in K(R^n)$$

$$2^\circ) \quad \forall_{(\varphi_t)_{t\in N}\in K(R^n)} \quad \varphi_t \xrightarrow{K(R^n)} 0 \Rightarrow (g_t, \varphi_t) = \psi_t(t) \xrightarrow{K(R^n)} 0$$

Observația 3. Distribuția cu suport compact $g \in \mathcal{E}'(R^n)$ generează familia $G=\{\tau_t g\}_{t\in(R^n)}$ de distribuții compozabile deoarece avem îndeplinite condițiile definiției 4.

DEFINIȚIA 5. Fie $f\in K'(R^n)$ și $G=\{g_t\}_{t\in R^n}$ o familie compozabilă de distribuții. Distribuția $f\circ G=h\in K'(R^n)$ definită prin relația:

$$(h, \varphi) =(f\circ G, \varphi) = (f(t), (g_t, \varphi)), \quad \forall_{\varphi\in K(R^n)}$$

se va numi produsul de compoziție dintre distribuția f și familia compozabilă de distribuții G.

Justețea definiției rezultă din condițiile 1° și 2° care asigură existența distribuției $h\in K'(R^n)$.

Dependența dintre produsul de compoziție notat prin simbolul „$\circ$" și produsul de convoluție este dată de:

PROPOZIȚIA 6. *Fie distribuția* $g \in \mathcal{E}'(R^n)$. *Atunci* $\forall_{f\in K'(R^n)}$ *avem*: $f\circ G = f * g$, *unde* $G = \{\tau_t g\}_{t\in R^n}$.

Demonstrație. $\forall_{\varphi\in K(R^n)}$ deoarece familia G de distribuții este compozabilă, putem scrie:

$$(f\circ G, \varphi) = (f, (\tau_t g, \varphi)) = (f,(g, \tau_{-t}\varphi)).$$

Dar g fiind cu suport compact, $f * g$ există și avem:

$$(f * g, \varphi) = (f_\xi \times g_\eta, \varphi(\xi+\eta)) = (f_\xi, (g_\eta, \tau_{-\xi}\varphi)) = (f, (g, \tau_{-t}\varphi))$$

de unde $(f\circ G, \varphi) = (f * g, \varphi)$ adică $f\circ G = f * g$.

În particular, pentru $g=\delta\in K'(R^n)$ obținem: $f\circ G=f$.

Produsul de compoziție ca și produsul de convoluție se bucură de proprietatea de continuitate.

PROPOZIȚIA 7. *Fie* $G=\{g_t\}_{t\in R^n}$ *o familie compozabilă de distribuții. Dacă* $f_t \xrightarrow{K'(R^n)} f$ *atunci* $f_t\circ G \to f\circ G$ în $K'(R^n)$.

Într-adevăr, $\forall_{\varphi\in K(R^n)}$ putem scrie:

$$(f_t\circ G, \varphi) =(f_t, (g_t, \varphi)) \to (f, (g_t, \varphi)) \text{ în } K'(R^n),$$

de unde $f_t\circ G \to f\circ G$ în K', deoarece $(g_t, \varphi)\in K(R^n)$.

Scanned with OKEN Scanner

În raport cu derivarea și simetria, produsul de compoziție posedă proprietățile :

$J_1)$ $D^\alpha(f \circ G) = f \circ D^\alpha G$

$J_2)$ $(f \circ G)^\vee = f \circ G^\vee$.

Într-adevăr, dacă $G = \{g_t\}_{t \in R^n}$ este o familie compozabilă atunci și $D^\alpha G = \{D^\alpha g_t\}_{t \in R^n}$ este compozabilă deoarece $\forall_{\varphi \in K(R^n)}$ avem $(D^\alpha g_t, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(g_t, D^\alpha \varphi)$ și în consecință condițiile 1° și 2° din definiția 4 sînt îndeplinite. Deci avem :

$$(D^\alpha(f \circ G), \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f \circ G, D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, (g_t, D^\alpha \varphi)) =$$
$$= (f, (D^\alpha g_t, \varphi))_t' = (f \circ D^\alpha G, \varphi)$$

de unde rezultă relația J_1.
Analog $G^\vee = \{g_t^\vee\}_{t \in R^n}$ este compozabilă deoarece $\forall_{\varphi \in K(R^n)}$ avem :

$$(g_t^\vee, \varphi) = (g_t, \varphi^\vee).$$

Deci putem scrie :

$$((f \circ G)^\vee, \varphi) = (f \circ G, \varphi^\vee) = (f, (g_t, \varphi^\vee)) =_t' (f, (g_t^\vee, \varphi)) = (f \circ G^\vee, \varphi)),$$

de unde rezultă proprietatea J_2.

Se arată ușor că dacă G este o familie compozabilă de distribuții, iar $\psi \in C^\infty(R^n)$, atunci și familia $\psi G = \{\psi g_t\}_{t \in R^n}$ este compozabilă. În consecință, dacă $D = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$, $\alpha \in N_0^n$, $a_\alpha \in C^\infty(R^n)$ este operator diferențial liniar de ordinul m cu coeficienți funcții indefinit derivabile, atunci familia $DG = \{Dg_t\}_{t \in R^n}$ este compozabilă și $\forall_{f \in K'(R^n)}$ avem :

$$D(f \circ G) = f \circ DG.$$

Într-adevăr, observăm că $\forall_{\varphi \in K'(R^n)}$ putem scrie :

$$(a_\alpha D^\alpha(f \circ G), \varphi) = (D^\alpha(f \circ G), a_\alpha \varphi) = (f \circ D^\alpha G, a_\alpha \varphi) =$$
$$= (f, (D^\alpha g_t, a_\alpha \varphi)) = (f, (a_\alpha D^\alpha g_t, \varphi)).$$

De aici deducem :

$$(D(f \circ G), \varphi) = (f, (Dg_t, \varphi)) = (f \circ DG, \varphi)$$

de unde rezultă proprietatea enunțată.

Exemplul 3. Fie $E_t \in K'(R)$ distribuția depinzînd de parametrul $t \in R_+$, anume :

$$E_t(x) = \frac{\sqrt{CL}}{2} e^{-\frac{R}{L}t} \theta(t - |x|\sqrt{CL}), \quad t \geq 0 \tag{15}$$

unde θ este distribuția lui Heaviside, iar R, L, C, constante pozitive.

Scanned with OKEN Scanner

Să arătăm că distribuția E_t satisface relațiile :

$$\lim_{t\to 0}\left(E_t,\ \frac{\partial E_t}{\partial t},\ \frac{\partial^2 E_t}{\partial t^2}\right)=\left(0,\ \delta_0,\ -2\frac{R}{L}\ \delta_0\right). \tag{16}$$

Într-adevăr, explicitînd expresia (15) obținem :

$$E_t(x)=\frac{\sqrt{CL}}{2}\ \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\ [\theta(x\sqrt{CL}+t)-\theta(x\sqrt{CL}-t)]. \tag{17}$$

Pentru $t\in R_t$ fixat, avem $\operatorname{supp} E_t=\left[-\frac{t}{\sqrt{CL}},\ \frac{t}{\sqrt{CL}}\right]$, deci distribuția E_t, pentru t fixat, are suport compact. Derivînd în sensul distribuțiilor, obținem :

$$\frac{\partial E_t}{\partial t}=-\frac{R}{L}E_t+\frac{\sqrt{CL}}{2}\ \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\ (\delta(x\sqrt{CL}+t)+\delta(x\sqrt{CL}-t))$$

$$\frac{\partial^2 E_t}{\partial t^2}=\left(\frac{R}{L}\right)^2 E_t-\frac{R}{L}\sqrt{CL}\ \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\ (\delta(x\sqrt{CL}+t)+\delta(x\sqrt{CL}-t))+$$

$$+\frac{\sqrt{CL}}{2}\ \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\ (\delta'(x\sqrt{CL}+t)-\delta'(x\sqrt{CL}-t)). \tag{18}$$

Pentru $t\to +0$ avem :

$$E_t\to 0,\ \frac{\partial E_t}{\partial t}\to\sqrt{CL}\,\delta(x\sqrt{CL}),\ \frac{\partial^2 E_t}{\partial t^2}\to-\frac{2R}{L}\sqrt{CL}\,\delta(x\sqrt{CL}).$$

Deoarece

$$\delta(x\sqrt{CL})=\frac{1}{\sqrt{CL}}\ \delta_0,\ \text{relațiile precedente devin :}$$

$$E_t\to 0,\ \frac{\partial E_t}{\partial t}\to\delta_0,\ \frac{\partial^2 E_t}{\partial t^2}\to-\frac{2R}{L}\ \delta_0,\ \text{adică relațiile} \tag{16}$$

Remarcăm că acest rezultat se obține prin calcularea următoarelor limite :

$$\lim_{t\to+0}\left(\frac{\partial E_t}{\partial t},\ \varphi\right),\ \lim_{t\to+0}\left(\frac{\partial^2 E_t}{\partial t^2},\ \varphi\right),\quad \varphi\in K(R) \tag{19}$$

Astfel, de exemplu, după schimbarea de variabilă $x=\frac{tu}{\sqrt{CL}}$ obținem :

$$(E_t,\ \varphi)=\frac{\sqrt{CL}}{2}\int_{-\frac{t}{\sqrt{CL}}}^{\frac{t}{\sqrt{CL}}}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\ \varphi(x)\mathrm{d}x=\frac{t}{2}\ \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\int_{-1}^{1}\varphi\left(\frac{tu}{\sqrt{CL}}\right)\mathrm{d}u$$

deci $\underset{\varphi\in K(R)}{\forall}\ \lim_{t\to 0}(E_t,\ \varphi)=0$, adică $\lim_{t\to+0}E_t=0$.

Scanned with OKEN Scanner

Analog, deoarece $\left(\frac{\partial E_t}{\partial t}, \varphi\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_t, \varphi)$ avem :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_t, \varphi) = \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} - \frac{t}{2}\,\frac{R}{L}\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)\int_{-1}^{1}\varphi\left(\frac{tu}{\sqrt{CL}}\right)\mathrm{d}u +$$

$$+\frac{t}{2}\,\frac{1}{\sqrt{CL}}\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\int_{-1}^{1}u\varphi'\left(\frac{tu}{\sqrt{CL}}\right)\mathrm{d}u.$$

În consecință :

$$\lim_{t\to+9}\left(\frac{\partial E_t}{\partial t}, \varphi\right) = \lim_{t\to+0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_t, \varphi) = \varphi(0) = (\delta_0, \varphi)$$

de unde $\lim\limits_{t\to+0}\frac{\partial E_t}{\partial t} = \delta_0$.

Printr-un procedeu similar, obținem :

$$\lim_{t\to+0}\left(\frac{\partial^2 E_t}{\partial t^2}, \varphi\right) = \lim_{t\to+0}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(E_t, \varphi) = -2\,\frac{R}{L}\,\varphi(0) = \left(-2\,\frac{R}{L}\,\delta_0, \varphi\right),$$

adică $\lim\limits_{t\to+0}\frac{\partial^2 E_t}{\partial t^2} = -2\,\frac{R}{L}\,\delta_0$.

Exemplul 4. Fie operatorul $D = CL\,\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2RC\,\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + RG$ corespunzător ecuației telegrafiștilor pentru linii fără distorsiuni ($RC = LG$), $G > 0$, anume :

$$Di(x, t) = CL\,\frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2} + 2RC\,\frac{\partial i(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} + 2RGi(x, t) = 0, \qquad (20)$$

unde $i(x, t)$ reprezintă intensitatea curentului exprimat printr-o distribuție depinzînd de parametrul t. Considerăm pentru distribuția $i(x, t) \in K'(R)$ expresia :

$$i(x, t) = E_t(x) \underset{(x)}{*}\left[-\frac{1}{L}\,\frac{\partial u_0(x)}{\partial x} + \frac{R}{L}\,i_0(x)\right] + \frac{\partial E_t}{\partial t} \underset{(x)}{*} i_0(x) \qquad (21)$$

unde $u_0,\ i_0 \in \mathscr{E}'(R)$. Deoarece E_t nu are suport compact, pentru $t > 0$ dar u_0 și i_0 sînt distribuții cu suport compact rezultă că convoluția în raport cu x din expresia (21) există, deci $i(x, t)$ este o distribuție depinzînd de parametrul $t \in R_+$. Ținînd seamă de relațiile (18) și de faptul că $\frac{\partial^2 E_t}{\partial x^2}$ are expresia :

$$\frac{\partial^2 E_t}{\partial x^2} = \frac{CL}{2}\sqrt{CL}\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\left(\delta'(x\sqrt{CL} + t) - \delta'(x\sqrt{CL} - t)\right) \qquad (22)$$

Scanned with OKEN Scanner

prin substituirea acestora în expresia operatorului D obținem $DE_t=0$, deci distribuția E_t este o soluție a ecuației telegrafiștilor pentru linii fără distorsiuni. De aici rezultă că avem :

$$Di(x, t) = DE_t \underset{(x)}{*}\left[-\frac{1}{L}\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{R}{L} i_0 \right] + \frac{\partial}{\partial t} DE_t * i_0 = 0,$$

adică și distribuția $i(x, t)$ satisface ecuația telegrafiștilor. Pentru $t \to +0$, obținem :

$$\lim_{t\to+0} i(x, t) = i_0, \lim_{t\to+0} \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} = \left(\lim_{t\to+0} \frac{\partial E_t}{\partial t}\right) \underset{(x)}{*}\left[-\frac{1}{L}\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{R}{L} i_0 \right] +$$

$$+ \lim_{t\to+0} \frac{\partial^2 E_t}{\partial t^2} \underset{(x)}{*} i_0 = \delta_0 * \left[-\frac{1}{L}\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{R}{L} i_0 \right] + \left(-\frac{2}{L} R\delta_0 \right) * i_0 =$$

$$= -\frac{1}{L}\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{R}{L} i_0$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 3

Transformări integrale și distribuții periodice

§ 1. Transformata Fourier

1. Transformata Fourier pentru funcții. Transformata Fourier a spațiului S

Transformările integrale reprezintă o metodă importantă de investigație matematică cu precădere la problemele de fizică matematică. Din multitudinea de transformate un loc central îl ocupă transformata Fourier, care fiind un operator liniar, prin proprietățile specifice pe care le posedă constituie un instrument de bază al analizei matematice.

Transformarea produsului de convoluție din spațiile S și S' în produse obișnuite și aplicația spațiilor S și S' în ele însele, constituie cele mai remarcabile proprietăți ale transformatei Fourier cu consecințe importante în studiul ecuațiilor diferențiale și al seriilor Fourier.

DEFINIȚIA 1. Numim transformata (imaginea) Fourier a funcției $f \in L^1(R^n)$, funcția complexă $\hat{f}: R^n \to \Gamma$ definită prin egalitatea:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{R^n} f(x) e^{i(x,\xi)}\, dx \tag{1}$$

unde (x, ξ) reprezintă produsul scalar al vectorilor x, $\xi \in R^n$ iar $i = \sqrt{-1}$.

Uneori vom nota $\hat{f}(\xi) = F[f](\xi)$. Din definiție, datorită liniarității integralei, rezultă că transformata Fourier este un operator liniar, deci:

$$\underset{\substack{\alpha_i \in \Gamma \\ f_i \in L^1(R^n)}}{\forall} \text{ avem } F\left[\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i\right] = \sum_{1=}^{p} \alpha_i F[f_i].$$

În particular, dacă $f_j \in L^1(R)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ și $f = \prod_{j=1}^{n} f_j(x_j)$ atunci

$$\hat{f} = \prod_{j=1}^{n} \hat{f}_j \,. \tag{1'}$$

Într-adevăr, $\hat{f}(\xi) = \int_{R^n} \prod_{j=1}^{n} f_j(x_j)\, e^{i(x,\xi)}\, dx = \prod_{j=1}^{n} \int_R f_j(x_j) e^{i x_j \xi_j}\, dx_j =$

$$= \prod_{j=1}^{n} \hat{f}_j(\xi_j)$$

adică $\hat{f} = \prod_{j=1}^{n} \hat{f}_j$.

Scanned with OKEN Scanner

PROPOZIȚIA 1. *Dacă* $f \in L^1(R^n)$, *atunci* $\hat{f}$ *este mărginită, continuă și*

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_1.$$

Într-adevăr, deoarece $|f(x)\, e^{i(x,\xi)}| = |f(x)|$, transformata Fourier există și avem :

$$|\hat{f}| \leqslant \int_{R^n} |f(x)|\,dx$$

adică $\hat{f}$ este mărginită și $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_1$. Continuitatea lui $\hat{f}$ rezultă din faptul că $f(x)\, e^{i(x,\xi)}$ este o funcție continuă de ξ aproape pentru toate valorile $x \in R^n$ și este mărginită de $|f|$. Remarcăm că se poate arăta că $\hat{f} \to 0$ cînd $\|\xi\| \to \infty$.

PROPOZIȚIA 2. *Fie* $f \in L^1(R^n)$ *și* $\forall_{\substack{\alpha \in N_0^n \\ |\alpha| \leqslant k}} x^\alpha f \in L^1(R^n)$. *Atunci avem :*

$$\hat{f} \in \mathscr{C}^k(R^n), \quad D^\alpha \hat{f} = \widehat{(ix)^\alpha f}, \quad |D^\alpha \hat{f}| \leqslant \|x^\alpha f\|_1, \tag{3}$$

D^α *fiind operator de derivare.*

Demonstrație. Doarece $x^\alpha f \in L^1(R^n)$ avem $x_1 f \in L^1(R^n)$. Dar cum funcția $x_1 f(x) e^{i(x,\xi)}$ este continuă pe R^n în raport cu ξ pentru aproape toți $x \in R^n$ și $|x_1 f e^{i(x,\xi)}| = |x_1 f|$, rezultă că putem deriva în raport cu ξ_1 sub semnul integrală și astfel obținem :

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \hat{f}(\xi) = \int_{R^n} \frac{\partial}{\partial \xi_1} f(x)\, e^{i(x,\xi)}\,dx = \int_{R^n} ix_1 f(x)\, e^{i(x,\xi)} = (ix_1)\,\hat{f}(\xi).$$

Repetînd acest raționament obținem :

$$D^\alpha \hat{f}(\xi) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \ldots \partial \xi_n^{\alpha_n}} f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = (ix_1)^{\alpha_1}(ix_2)^{\alpha_2} \ldots (ix_n)^{\alpha_n}\, \hat{f}(\xi) =$$

$$= (ix)^\alpha\, \hat{f}(\xi), \; |\alpha| \leqslant k.$$

deci $\hat{f} \in \mathscr{C}^k(R^n)$ și $|D^\alpha \hat{f}| \leqslant \|x^\alpha f\|_1$.
Cu aceasta propoziția este demonstrată.

PROPOZIȚIA 3. *Dacă* $f \in \mathscr{C}^k(R^n)$ *și* $\forall_{\substack{\alpha \in N_0^n \\ |\alpha| \leqslant k}} D^\alpha f \in L^1(R^n)$, *atunci*

$$\widehat{D^\alpha f} = (-i\xi)^\alpha \hat{f}, \quad |\xi^\alpha \hat{f}| \leqslant \|D^\alpha f\|_1. \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Deoarece $f \in \mathcal{E}^k(R^n)$ și $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \in L^1(R^n)$ rezultă că $f(x)e^{i(x,\xi)} \in$ $\in \mathcal{E}^k(R^n)$, deci :

$$\int_{R^n} \frac{\partial}{\partial x_1} [f(x)e^{i(x,\xi)}]\, dx = \int_{R^n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} e^{i(x,\xi)} + i\xi_1 f(x)\, e^{i(x,\xi)} \right) dx =$$

$$= \int_{R^{n-1}} [f(x)\, e^{i(x,\xi)}]_{x_1=-\infty}^{x_1=+\infty}\, dx_2\, dx_3, \ldots, dx_n.$$

Pentru evaluarea limitei de sub semnul integrală, avem

$$\int_0^{x_1} \frac{\partial}{\partial t} f(t, x_2, \ldots, x_n)\, dt = f(x_1, x_2, \ldots . x_n) - f(0, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

deoarece $\frac{\partial f}{\partial x_1} \in L^1(R^n)$. În consecință, pentru $|x_1| \to \infty$ membrul stîng există deci $\lim_{|x_1|\to\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este finită și în mod necesar nulă pentru că altfel funcția f n-ar fi integrabilă. Cu acestea avem :

$$\int_{R^{n-1}} [f(x)\, e^{i(x,\xi)}]_{x_1=-\infty}^{x_1=\infty}\, dx_2\, dx_3, \ldots, dx_n = 0$$

deci

$$\int_{R^n} \frac{\partial f}{\partial x_1} e^{i(x,\xi)}\, dx = -i\xi_1 \int_{R^n} f(x)\, e^{i(x,\xi)}\, dx$$

adică :

$$F\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right] = -i\xi_1 F[f].$$

Repetînd raționamentul obținem :

$$\widehat{D^\alpha f} = (-i\xi)^\alpha \hat{f} \quad \text{și} \quad |\xi^\alpha \hat{f}| \leqslant \|D^\alpha f\|_1.$$

Exemplul 1. Fie funcția $f(x) = e^{-a^2x^2}$, $a \neq 0$, $x \in R$. Evident $f \in L^1(R)$ și $\int_R f(x)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{|a|}$. Dar funcția f verifică ecuația diferențială :

$$f' + 2a^2 xf = 0.$$

Deoarece $xf \in L^1(R)$ prin aplicarea transformatei Fourier ecuației diferențiale și ținînd seama de proprietățile (3), (4) obținem :

$$-i\xi\hat{f}(\xi) - 2a^2 i(\hat{f})' = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde prin integrare rezultă soluţia : $\hat{f}(\xi) = C\, e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}}$. Considerînd $\xi=0$, atunci $C = \hat{f}(0) = \int_R f(x)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{|a|}$,

deci

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{|a|}\, e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}}. \tag{5}$$

Să considerăm acum funcţia $F(x) = e^{-a^2||x||^2}$, $a \in R \setminus \{0\}$, $x \in R^n$. Observăm că putem scrie :

$$F(x) = \prod_{J=}^{n} e^{-a^2 x_J^2}.$$

În baza formulei (1′) avem :

$$\hat{F}(\xi) = \prod_{J=1}^{n} \widehat{e^{-a^2 x_J^2}} = \prod_{J=1}^{n} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{|a|}\right) e^{-\frac{\xi_J^2}{4a^2}} = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{|a|}\right)^n e^{-\frac{||\xi||^2}{4a^2}}$$

adică am obţinut formula :

$$\widehat{e^{-a^2||x||^2}}(\xi) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{|a|}\right)^n e^{-\frac{||\xi||^2}{4a^2}} \tag{6}$$

Pe baza acestei relaţii vom demonstra formula de inversare a transformatei Fourier. Avem astfel propoziţia :

PROPOZIŢIA 4. *Fie* $f \in L^1(R^n)$ *continuă pe* R^n. *Atunci* $\forall_{x \in R^n}$

$$f(x) = F^{-1}[\hat{f}] = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \hat{f}(\xi)\, e^{-i(x,\,\xi)}\, d\xi. \tag{7}$$

Aceasta constituie formula de inversare a transformatei Fourier.

Demonstraţie. Pentru $a \in R^+$ şi deoarece $\hat{f}$ este mărginită, avem :

$$\int_{R^n} \hat{f}(\xi)\, e^{-a^2||\xi||^2 - i(x,\xi)}\, d\xi = \int_{R^n} e^{-a^2||\xi||^2 - i(x,\,\xi)}\, d\xi . \int_{R^n} f(t)\; e^{i(t,\,\xi)}\, dt =$$

$$= \int_{R^n \times R^n} e^{-a^2||\xi||^2 - i(x,\,\xi)} . e^{i(t,\,\xi)} f(t)\, d\xi\, dt = \int_{R^n} f(t) \int_{R^n} e^{-a^2||\xi||^2} . e^{i(\xi,\,t-x)} d\xi\, dt.$$

Dar cum $\int_{R^n} e^{-a^2||\xi||^2}\, e^{i(\xi,\,t-x)}\, d\xi = F[e^{-a^2||\xi||^2}](t - x) =$

$$= \left(\frac{\sqrt{\pi}}{a}\right)^n e^{-\frac{||t-x||^2}{4a^2}}$$

Scanned with OKEN Scanner

datorită formulei (6), obţinem :

$$\int_{R^n} \hat{f}(\xi)\, e^{-a^2||\xi||^2 - i(x,\xi)}\, d\xi = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{a}\right)^n \int_{R^n} f(t)\; e^{-\frac{||t-x||^2}{4a^2}}\, dt.$$

Efectuînd schimbarea de variabile $\frac{t-x}{2a} = y$, formula precedentă devine :

$$\int_{R^n} \hat{f}(\xi)\, e^{-a^2||\xi||^2 - i(x,\xi)}\, d\xi = (2\sqrt{\pi})^n \int_{R^n} e^{-||y||^2} f(x + 2ay)\, dy.$$

Ţinînd seamă că $\int_{R^n} e^{-||y||^2}\, dy = (\sqrt{\pi})^n$ pentru $a \to +0$, obţinem :

$\int_{R^n} \hat{f}(\xi)\, e^{-i(x,\xi)}\, d\xi = (2\pi)^n f(x)$, adică relaţia cerută. Remarcăm că dacă $\hat{f} \in L^1(R^n)$ atunci formula de inversare are loc aproape pentru toate valorile lui x din R^n.

În baza formulei de inversare (7) putem scrie :

$$F^{-1}[F[f]] = f. \tag{7'}$$

De asemenea avem :

$$F^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\hat{f}](-x) = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\hat{f}(-\xi)]. \tag{8}$$

Într-adevăr, aceasta rezultă imediat din relaţiile :

$$F^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \hat{f}(\xi)\, e^{-i(x,\xi)}\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\hat{f}](-x) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \hat{f}(-\xi)\, e^{i(x,\xi)}\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\hat{f}(-\xi)].$$

PROPOZIŢIA 5. *Dacă* $f, g \in L^1(R^n)$ *atunci au loc formulele* :

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\,\hat{g} \tag{9}$$

$$\int_{R^n} \hat{f}(\xi)\, g(\xi)\, d\xi = \int_{R^n} f(x)\, \hat{g}(x)\, dx, \tag{10}$$

aceasta din urmă numindu-se formula lui Parseval.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. În baza propoziției 3 și formulei (4) din II.1.1. $f * g \in L^1(R^n)$ și avem :

$$e^{i(x,\xi)}(f * g)(x) = f\, e^{i(x,\xi)} * g\, e^{i(x,\xi)}$$

de unde, tot în virtutea propoziției 3, obținem :

$$\int_{R^n} (f * g)(x)\, e^{i(x,\xi)}\, dx = \int_{R^n} f(x)\, e^{i(x,\xi)}\, dx . \int_{R^n} g(x)\, e^{i(x,\xi)}\, dx$$

adică

$$\widehat{f * g} = \hat{f} . \hat{g}.$$

În ce privește formula lui Parseval (10), observăm că deoarece $f, g \in L^1(R^n)$ avem $|f(x)\, g(\xi)| = |f(x)\, g(\xi)\, e^{i(x,\xi)}|$ și în consecință $f(x)\, g(\xi)$ este integrabilă pe $R^n \times R^n$. În baza teoremei lui Fubini obținem :

$$\int_{R^n \times R^n} f(x)\, g(\xi)\, e^{i(x,\xi)}\, dx\, d\xi = \int_{R^n} \left(\int_{R^n} g(\xi)\, e^{i(x,\xi)}\, d\xi \right) f(x) dx =$$

$$= \int_{R^n} g(\xi) \left(\int_{R^n} f(x)\, e^{i(x,\xi)}\, dx \right) d\xi$$

de unde rezultă relația căutată :

$$\int_{R^n} f(x)\, \hat{g}(x)\, dx = \int_{R^n} \hat{f}(\xi)\, g(\xi)\, d\xi.$$

Menționăm că această formulă are loc și dacă $f, g \in L^2(R^n)$. Proprietățile transformatei Fourier în raport cu translația, omotetia și simetria sînt evidențiate prin propozițiile ce urmează.

PROPOZIȚIA 6. *Dacă* $f \in L^1(R^n)$ *și* $a \in R^n$ *atunci*

$$\widehat{\tau_a f} = e^{i(a,\xi)} \hat{f}, \quad \widehat{e^{-i(a,x)} f(x)} = \tau_a \hat{f}. \tag{11}$$

Demonstrație. După schimbarea de variabile $x - a = t$, avem :

$$\widehat{\tau_a f}(\xi) = \int_{R^n} f(x-a)\, e^{i(x,\xi)}\, dx = \int_{R^n} f(t)\, e^{i(t+a,\xi)}\, dt = e^{i(a,\xi)} \hat{f}(\xi).$$

În privința celei de a doua relații, putem scrie :

$$\widehat{e^{-i(a,x)} f(x)} = \int_{R^n} e^{i(x,\,-a)} . e^{i(x,\xi)} f(x)\, dx = \int_{R^n} e^{i(x,\xi-a)} f(x) dx,$$

adică

$$\widehat{e^{-i(a,x)} f(x)} = \tau_a \hat{f}(\xi).$$

Scanned with OKEN Scanner

PROPOZIȚIA 7. *Fie* $f \in L^1(R^n)$ *și* $a = (a_{ij}\ \delta_{ij})$, $\det a \neq 0$, $a_{ij} \in R$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$ *o matrice nesingulară, iar* δ_{ij} *simbolul lui Kronecker. Atunci avem :*

$$\widehat{f(ax)}\,(\xi) = \frac{1}{|\det a|}\hat{f}(a^{-1}.\xi). \tag{12}$$

Demonstrație. Făcînd substituția $y = a.x$, atunci $x = a^{-1}.y$, $a^{-1} = (a_{ij}^{-1}\ \delta_{ij})$, $\det a^{-1} = \frac{1}{\det a}$ și avem :

$$\widehat{f(a.x)}\,(\xi) = \int_{R^n} f(a.x)\, e^{i(x,\,\xi)}\, dx = |\det\ a^{-1}| \int_{R^n} f(y)\, e^{i(y,\,a^{-1}.\xi)} dy =$$

$$= \frac{1}{|\det a|}\hat{f}(a^{-1}.\xi).$$

În particular, dacă $a_{ij} = \alpha \in R$, $\alpha \neq 0$, avem $\det a = \alpha^n$ și $a^{-1}.\xi = \frac{\xi}{\alpha}$ deci

$$\widehat{f(\alpha x)}\,(\xi) = \frac{1}{|\alpha|^n}\hat{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right). \tag{13}$$

Pentru $\alpha = -1$ obținem transformarea prin simetrie și în consecință relația precedentă devine :

$$\widehat{f(-x)}\,(\xi) = \hat{f}(-\xi) \tag{14}$$

adică

$$\widehat{f^\vee} = (\hat{f})^\vee. \tag{14'}$$

Exemplul 2. Fie funcțiile : $f_a(x) = \left(\frac{|a|}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-a^2||x||^2}$, $f_b(x) = \left(\frac{|b|}{\sqrt{\pi}}\right)^n \times$ $\times\, e^{-b^2||x||^2}$, $a, b \in R \setminus \{0\}$. Atunci are loc formula :

$$f_a * f_b = f_c, \text{ unde } c = \frac{|ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{15}$$

Într-adevăr, deoarece $f_a, f_b \in L^1(R^n)$, avem $f_a * f_b \in L^1(R^n)$ și în baza formulei (6) și a propoziției 5, obținem :

$$\widehat{f_a * f_b} = \hat{f}_a \hat{f}_b = e^{-\frac{\xi^2}{4c^2}} = \left(\frac{|c|}{\sqrt{\pi}}\right)^n \widehat{e^{-c^2||x||^2}},$$

unde $c = \frac{|ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Prin aplicarea transformatei Fourier inversă găsim

$$f_a * f_b = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\, e^{-c^2||x||^2} = f_c.$$

Scanned with OKEN Scanner

Transformata Fourier a spaţiului S

PROPOZIŢIA 8. *Transformata Fourier este un operator liniar şi continuu ce aplică spaţiul S pe el însăşi.*

Demonstraţie. Deoarece $S \subset L^1(R^n)$, atunci $\underset{\varphi \in S}{\forall}$ rezultă că $\hat{\varphi}$ este continuă şi mărginită pe R^n. De asemenea $\underset{\alpha,\, \beta \in N_0^n}{\forall}$ avem $D^\beta(x^\alpha \varphi) \in L^1(R^n)$ şi în baza propoziţiilor 2 şi 3 putem scrie :

$$F[D^\beta(x^\alpha \varphi)] = (-i\xi)^\beta F[x^\alpha \varphi] = \frac{(-i\xi)^\beta}{i\alpha} D^\alpha(\hat{\varphi})$$

de unde

$$(-\xi)^\beta D^\alpha \hat{\varphi}(\xi) = i^{|\alpha|-|\beta|} \widehat{D^\beta(x^\alpha \varphi)}, \text{ adică}$$

$$\xi^\beta D^\alpha \hat{\varphi}(\xi) = (-1)^{|\beta|} i^{|\alpha|-|\beta|} \widehat{D^\beta(x^\alpha \varphi)} = i^{|\alpha|+|\beta|} \widehat{D^\beta(x^\alpha \varphi)}.$$

Aplicînd propoziţia 1, găsim :

$$|\xi^\beta D^\alpha \hat{\varphi}(\xi)| \leqslant \|D^\beta(x^\alpha \varphi)\|_1 \tag{16}$$

adică $\xi^\beta D^\alpha \hat{\varphi}(\xi)$ este mărginită, deci $\hat{\varphi} \in \dot{S}$.

În consecinţă, transformatele Fourier, $\hat{\varphi}$ ale funcţiilor din spaţiul S sînt funcţii integrabile pe R^n şi de clasa $C^\infty(R^n)$.

Remarcăm că deoarece $K \subset S$, transformata Fourier nu aplică spaţiul K pe el însăşi. Astfel, dacă $\varphi \in K(R^n)$ atunci $\hat{\varphi} \notin K(R^n)$ deoarece $\hat{\varphi}$ nu mai are suportul compact decît dacă $\varphi \equiv 0$. Transformatele Fourier ale funcţiilor $\varphi \in K(R^n)$ sînt funcţii analitice. Pentru a arăta că transformata Fourier este un operator continuu din S în S va trebui să verificăm că $\underset{\substack{(\varphi_i)_{i \in N} \in S \\ \varphi \in S}}{\forall}$ $\varphi_i \to \varphi$ în S implică $\hat{\varphi}_i \to \hat{\varphi}$ în S. Într-adevăr, în virtutea inegalităţii (16), obţinem :

$$|\xi^\beta D^\alpha \widehat{(\varphi_i - \varphi)}| \leqslant \|D^\beta x^\alpha (\varphi_i - \varphi)\|_1 \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{x \in R^n \\ \forall \\ \alpha,\, \beta \in N_0^n}} |D^\beta x^\alpha (\varphi_i - \varphi)|(1 + \|x\|^2)^n \int_{R^n} \frac{dx}{(1+\|x\|^2)^n} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{x \in R^n \\ \forall \\ \alpha,\, \beta \in N_0^n}} |D^\beta [x^\alpha (\varphi_i - \varphi)]|(1 + \|x\|^2)^n \pi^n$$

Scanned with OKEN Scanner

deoarece

$$\int_{R^n} \frac{dx}{(1+\|x\|^2)^n} \leqslant \int_{R^n} \frac{dx}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)\ldots(1+x_n^2)} = \pi^n.$$

De aici deducem : $\xi^\beta D^\alpha \hat{\varphi}_i \overset{u}{\Rightarrow} \xi^\beta D^\alpha \hat{\varphi}$ în baza convergenței din spațiul S, adică $\hat{\varphi}_i \to \hat{\varphi}$ în S.

PROPOZIȚIA 9. *Dacă $f, g \in S$ atunci $f * g \in S$ și au loc formulele:*

$$\text{i) } \widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g} \tag{17}$$

$$\text{ii) } (f * g)^\vee = f^\vee * g^\vee. \tag{18}$$

Demonstrație. Deoarece $f, g \in S$ rezultă $f, g \in L^1(R^n)$ și în baza formulei (9) obținem relația (17). Pentru a arăta proprietatea simetriei (18), utilizînd definția produsului de convoluție și substituția $t = -u$, obținem :

$$(f * g)^\vee(x) = (f * g)(-x) = \int_{R^n} f(t) g(-x-t)\, dt = \int_{R^n} f(-u)\, g(-x+u)\, du$$

deci

$$(f * g)^\vee(x) = \int_{R^n} f^\vee(u)\, g^\vee(x-u) du = (f^\vee * g^\vee)(x).$$

Pentru a arăta că $f * g \in S$ observăm că $\underset{\substack{\alpha \in N_0^n \\ x \in R^n}}{\forall}$ avem $|x^\alpha| \leqslant \|x\|^{|\alpha|}$. În consecință, prin dezvoltarea binomului obținem :

$$|x^\alpha| \leqslant \|(x-t)+t\|^{|\alpha|} \leqslant (\|x-t\| + \|t\|)^{|\alpha|} = \Sigma C_{pq} \|x-t\|^p \|t\|^q.$$

Suma din membrul drept are un număr finit de termeni, iar coeficienții C_{pq} depind numai de numărul pozitiv $|\alpha|$.

În consecință putem scrie :

$$|x^\alpha (f * g)(x)| \leqslant \|x\|^{|\alpha|} |(f * g)(x)| \leqslant \int_{R^n} \|x\|^{|\alpha|} |f(t)| \cdot |g(x-t)|\, dt \text{ deci}$$

$$|x^\alpha (f * g)(x)| \leqslant \sum C_{pq} \int_{R^n} \|t\|^q \cdot |f(t)| \cdot \|x-t\|^p |g(x-t)|\, dt =$$

$$= \sum C_{pq} (\|x\|^q |f| * \|x\|^p |g|)(x)$$

Remarcăm că membrul drept este finit, iar produsele de convoluție există deoarece $\|x\|^q |f|$, $\|x\|^p |g| \in S$. Ținînd seamă că $D^\beta(f * g) = D^\beta f * g$ și de faptul că $D^\beta f \in S$, obținem :

$$|x^\alpha D^\beta (f * g)(x)| \leqslant \sum C_{pq} (\|x\|^q |D^\beta f| * \|x\|^p |g|)(x)$$

Scanned with OKEN Scanner

adică $|x^\alpha D^\beta (f * g)| \leqslant C'_{\alpha\beta}$, deci $f * g \in S$. Cu aceasta propoziţia este demonstrată.

Dacă $f \in S$ atunci $\hat{f} \in S$ şi în baza formulelor (7) şi (8) obţinem între transformata Fourier directă şi cea inversă relaţiile:

$$F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f \tag{19}$$

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} (F[f])^\vee . \tag{19'}$$

Într-adevăr, formula (19) rezultă direct din (7) şi (8).
În ce priveşte formula (19'), ţinînd seamă de (7) obţinem

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} f(\xi)\, e^{-i(x,\xi)}\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{f}(-\xi)$$

deci

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} (F[f])^\vee .$$

Se verifică imediat că propoziţia 8 este valabilă şi pentru operatorul F^{-1}.

PROPOZIŢIA 10. *Fie $f \in S$. Atunci avem:*

$$F[F[f]] = \hat{\hat{f}} = (2\pi)^n f^\vee . \tag{20}$$

Într-adevăr, deoarece $\hat{f}$ este continuă şi integrabilă avem:

$$F^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \hat{f}(\xi)\, e^{-i(x,\xi)} d\xi = f(x)$$

dar

$$F[\hat{f}](x) = \int_{R^n} \hat{f}(\xi)\, e^{i(x,\xi)}\, d\xi = (2\pi)^n f(-x)$$

deci

$$\hat{\hat{f}} = F[F[f]] = (2\pi)^n f^\vee .$$

În ce priveşte formula lui Parseval (10), observăm că ea rămîne valabilă pentru funcţiile din spaţiul S deoarece $S \subset L^1(R^n)$. În consecinţă putem scrie:

$\forall$
$f, g \in S$

$$\int_{R^n} \hat{f}(\xi)\, g(\xi)\, d\xi = \int_{R^n} f(x)\, \hat{g}(x)\, dx. \tag{21}$$

Scanned with OKEN Scanner

2. Transformata Fourier a distribuţiilor din spaţiul S'

Pentru a extinde transformata Fourier la distribuţii din spaţiul S' (distribuţii temperate) vom considera formula lui Parseval (21), III.1.1, care observăm că se poate scrie sub forma :

$$(\hat{f}, \varphi) = (f, \hat{\varphi}), \underset{f, \varphi \in S}{\forall} \tag{1}$$

DEFINIŢIA 1. Numim transformată Fourier a distribuţiei $f \in S'$, distribuţia $F[f]=\hat{f}$ definită de relaţia :

$$(\hat{f}, \varphi) = (f, \hat{\varphi}), \underset{\varphi \in S}{\forall}. \tag{2}$$

PROPOZIŢIA 1. *Dacă $f \in S'$ atunci $\hat{f} \in S'$.*

Într-adevăr, deoarece $\hat{\varphi} \in S$ rezultă că $(f, \hat{\varphi})$ defineşte o funcţională liniară pe S. Continuitatea acestei funcţionale rezultă din propoziţia 8.III.1.1, deoarece $\underset{\substack{(\varphi_i)_{i \in N} \in S \\ \varphi \in S}}{\forall} \varphi_i \to \varphi$ în S, implică $\hat{\varphi}_i \to \hat{\varphi}$ în S.

În consecinţă $(f, \hat{\varphi})$ defineşte o funcţională liniară şi continuă pe S, deci $\hat{f} \in S'$.

Ca şi în spaţiul S, vom introduce în spaţiul distribuţiilor temperate S' transformata Fourier inversă F^{-1}.

DEFINIŢIA 2. Numim transformată Fourier inversă distribuţiei $f \in S'$, distribuţia $F^{-1}[f]$ definită de egalitatea :

$$(F^{-1}[f], \varphi) = (f, F^{-1}[\varphi]), \underset{\varphi \in S}{\forall}. \tag{3}$$

PROPOZIŢIA 2. *Fie $f \in S'$. Atunci $F^{-1}[f] \in S'$ şi avem*

$$F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f. \tag{4}$$

Demonstraţie. Deoarece $F^{-1}[\varphi] \in S$ şi F^{-1} este un operator liniar şi continuu ce aplică pe S în el însăşi, deducem că $(f, F^{-1}[\varphi])$ este o funcţională liniară şi continuă pe S, deci $F^{-1}[f] \in S'$.

În baza formulelor (2), (3) obţinem :

$$(F[F^{-1}[f]], \varphi) = (F^{-1}[f], F[\varphi]) = (f, F^{-1}[F[\varphi]]) = (f, \varphi).$$

Procedînd analog găsim $(F^{-1}[F[f]], \varphi)=(f, \varphi)$ de unde rezultă relaţia (4) şi propoziţia este astfel demonstrată.

PROPOZIŢIA 3. *Dacă $f \in S'$ avem:*

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f^\vee]. \tag{5}$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. $\forall_{\varphi \in S}$, ținînd seamă de formula (4) și de (19′) din III 1.1., putem scrie:

$$(F^{-1}[f],\ \varphi)=(f,\ F^{-1}\ [\varphi])=\left(f,\ \frac{1}{(2\pi)^n}\ (\hat{\varphi})^{\vee}\right)=$$

$$=\left(f^{\vee},\ \frac{1}{(2\pi)^n}\ \hat{\varphi}\right)=\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\ F[f^{\vee}],\ \varphi\right),$$

de unde obținem:

$$F^{-1}[f]=\frac{1}{(2\pi)^n}\ F[f^{\vee}].$$

Remarcăm că această formulă constituie analogul formulei (19′) din III.1.1., stabilită pentru funcțiile din spațiul S.

Pe lîngă transformata Fourier în raport cu ansamblul variabilelor, putem defini transformata Fourier parțială și pentru distribuții.

DEFINIȚIA 3. Numim transformată Fourier parțială în raport cu variabila x a distribuției $f(x, y) \in S'(R^{n+m})$, $x \in R^n$, $y \in R^m$, distribuția $F_x[f] \in S'(R^{n+m})$ definită de egalitatea:

$$(F_x[f],\ \varphi) = (f,\ F_{\xi}[\varphi]), \qquad \forall_{\varphi(\xi,\ y) \in S(R^{n+m}),} \tag{6}$$

unde $F_{\xi}[\varphi](x, y) = \int_{R^n} \varphi(\xi, y)\ e^{i(\xi,\ x)}\ d\xi.$

Justețea acestei definiții rezultă din faptul că funcția $F_{\xi}[\varphi](x, y) \in S(R^{n+m})$ și operația $F_{\xi}[\varphi]$ este continuă din $S(R^{n+m})$ în el însăși. Deci $F_x\ [f]\ (\xi, y)$ este o distribuție din $S'(R^{n+m})$.

În legătură cu distribuțiile cu suport compact, deoarece $\mathcal{E}'(R^n) \subset S'(R^n)$, avem proprietatea exprimată de propoziția:

PROPOZIȚIA 4. *Dacă* $f \in \mathcal{E}'(R^n)$ *atunci* $\forall_{\alpha \in N_0^n}$ *avem relațiile:*

$$D^{\alpha}\hat{f}(\xi) = (f_x,\ D^{\alpha}\ e^{i(x,\ \xi)}) = (f_x,\ (ix)^{\alpha}\ e^{i(x,\ \xi)}) \tag{7}$$

$$\hat{f}(\xi) = (f_x,\ e^{i(x,\ \xi)}). \tag{8}$$

Demonstrație. Deoarece $f \in \mathcal{E}'$ rezultă $f \in S'$, deci $\forall_{\varphi \in S}$ putem scrie:

$$(D^{\alpha}\hat{f},\ \varphi) = (-1)^{|\alpha|}\ (f,\ D^{\alpha}\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\ (f,\ \eta\ \widehat{D^{\alpha}\varphi}) =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\left(f_x,\ \eta(x)\ (-ix)^{\alpha}\ .\int_{R^n} \varphi(\xi)\ e^{i(x,\ \xi)}\ d\xi\right),$$

unde $\eta \in K(R^n)$, $\eta(x)=1$ pe o vecinătate compactă a suportului distribuției $f \in \mathcal{E}'(R^n)$.

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seamă că $(f_x, \eta(x)\,(ix)^\alpha\, e^{i(x,\xi)}) \in C^\infty(R^n)$ şi în baza teoremei lui Fubini, obţinem :

$$(D^\alpha \hat{f},\ \varphi) = \int_{R^n} (f_x,\ \eta(x)\,(ix)^\alpha\, e^{i(x,\xi)})\varphi(\xi)\,d\xi =$$

$$= ((f_x,\ \eta(ix)^\alpha\, e^{i(x,\xi)}),\ \varphi)$$

de unde rezultă formula căutată :

$$D^\alpha \hat{f} = (f_x, \eta(x)(ix)^\alpha\, e^{i(x,\xi)}) = (f_x,\ (ix)^\alpha\, e^{i(x,\xi)}).$$

Pentru $\alpha = 0$ găsim astfel formula :

$$\hat{f} = (f_x,\ e^{i(x,\xi)})$$

prin care propoziţia este demonstrată.

Exemplul 1. Fie $f = \delta_0 \in \mathcal{E}'(R^n)$. Atunci avem :

$$F[\delta_0] = \hat{\delta}_0 = 1\,;\ F^{-1}[1] = \delta_0,\ F[1] = (2\pi)^n \delta(\xi) \tag{9}$$

Într-adevăr, conform formulei (7) găsim :

$\hat{\delta}_0 = (\delta_0,\ e^{i(x,\xi)}) = e^{i(0,\xi)} = 1$, de unde pe baza transformatei Fourier inversă avem $F^{-1}[1] = \delta_0$. Aplicînd formula (5), obţinem :

$$F^{-1}[1] = \delta_0 = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1^\vee] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1]$$

de unde

$$F[1] = (2\pi)^n \delta(\xi).$$

Remarcăm că funcţia $1 \notin S$, dar fiind o funcţie cu creştere lentă generează o distribuţie de tip funcţie din $S'(R^n)$. În consecinţă, distribuţia $f = 1 \in S'(R^n)$ acţionează după formula :

$$(1,\ \varphi) = \int_{R^n} \varphi\, dx,\quad \varphi \in S.$$

Proprietăţi ale transformatei Fourier. Se poate arăta că toate proprietăţile transformatei Fourier pentru funcţiile din spaţiul S rămîn valabile şi pentru distribuţiile din S'.

Astfel $\underset{f \in S'}{\forall}$ au loc formulele :

$$1^\circ\ D^\alpha \hat{f} = \widehat{(ix)^\alpha f},\ D^\alpha \text{ fiind un operator de derivare}$$

$$2^\circ\ \widehat{D^\alpha f} = (-i\xi)^\alpha \hat{f}$$

$$3^\circ\ \widehat{\tau_a f} = e^{i(a,\xi)} \hat{f},\quad \underset{a \in R^n}{\forall} \tag{10}$$

$$4^\circ\ \tau_a \hat{f} = \widehat{e^{-i(a,x)} f}$$

$$5^\circ\ \widehat{f_x \times g_y} = \hat{f}_x \times \hat{g}_y,\quad \underset{f \in S'(R^n),\ g \in S'(R^m)}{\forall}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Astfel de exemplu, pentru a arăta formula 1° $\underset{\varphi\in S}{\forall}$ putem scrie:

$$(D^{\alpha}\hat{f},\ \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(\hat{f},\ D^{\alpha}\varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f,\ \widehat{D^{\alpha}\varphi}) =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}(f,\ (-\mathrm{i}x)^{\alpha}\hat{\varphi}(x)) = ((\mathrm{i}x)^{\alpha}f,\ \hat{\varphi}) = \widehat{(\mathrm{i}x)^{\alpha}f},\ \varphi)$$

de unde pe baza egalității a două distribuții găsim formula 1°. Analog se demonstrează și celelalte formule. În ce privește formula 5°, aceasta se demonstrează ținînd seamă că dacă $f_x \in S'(R^n)$ și $g_y \in S'(R^m)$, atunci $f_x \times g_y \in S'(R^{n+m})$. În legătură cu transformata Fourier a produsului de convoluție avem:

PROPOZIȚIA 5. *Fie* $f \in S'(R^n)$, $g \in \mathscr{E}'(R^n)$. *Atunci are loc formula:*

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\,\hat{g}. \tag{11}$$

Demonstrație. Deoarece distribuția g are suport compact, produsul de convoluție $f * g$ există și $f * g \in S'$. De asemeni în baza formulei (7) putem scrie:

$\hat{g} = (g_y,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(y,\,\xi)})$, deci $\hat{g}$ este un multiplicator al spațiului S și $\underset{\varphi\in S}{\forall}$ avem $\hat{g}\varphi \in S$. Prin urmare:

$$(\widehat{f * g},\ \varphi) = (f * g,\ \hat{\varphi}) = \left(f_x \times g_y,\ \int_{R^n} \varphi(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y,\,\xi)}\,\mathrm{d}\xi\right) =$$

$$= \left(f, \int_{R^n} (g_y,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(y,\,\xi)})\varphi(\xi)\mathrm{e}^{\ \mathrm{i}(x,\,\xi)}\mathrm{d}\xi\right) = \left(f, \int_{R^n} \hat{g}_{\xi}\ \varphi(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x,\,\xi)}\,\mathrm{d}\xi\right) =$$

$$= (f,\ \widehat{\hat{g}\varphi}) = (\hat{f}\,\hat{g},\ \varphi)$$

de unde rezultă propoziția enunțată.

Observație. Dacă $f,\ g \in \mathscr{E}'(R^n)$ demonstrația se simplifică pentru că în acest caz $f * g \in \mathscr{E}'(R^n)$ și în consecință putem scrie în baza formulei (7):

$$\widehat{f * g} = (f * g,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x,\,\xi)}) = (f_x \times g_y,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y,\,\xi)}) =$$

$$= (f_x \times g_y,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x,\,\xi)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(y,\,\xi)}) = (f_x,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x,\,\xi)})\,(g_y,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(y,\,\xi)}) = \hat{f}\,\hat{g}.$$

Exemplul 2. Fie $\delta_0 \in \mathscr{E}'(R^n)$ și $\alpha \in N_0^n$. Atunci avem formulele:

$$\widehat{D^{\alpha}\delta_0} = (-\mathrm{i}\xi)^{\alpha}$$

$$\widehat{x^{\alpha}} = (2\pi^n)\,(-\mathrm{i})^{|\alpha|}D^{\alpha}\delta(\xi). \tag{12}$$

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, aplicînd proprietatea 2° din (10) obţinem :

$$\widehat{D^\alpha \delta_0} = (-\mathrm{i}\xi)^\alpha \hat{\delta}_0 = (-\mathrm{i}\xi)^\alpha, \quad \text{deoarece} \quad \hat{\delta}_0 = 1.$$

De asemenea conform formulei (9) şi proprietăţii 1° din (10) avem :

$$\hat{1} = (2\pi)^n \delta(\xi) \quad \text{deci} \quad D^\alpha \hat{1} = \widehat{(\mathrm{i}x)^\alpha} = \mathrm{i}^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha},$$

de unde

$$\hat{x}^\alpha = (2\pi)^n \mathrm{i}^{-|\alpha|} D^\alpha \delta(\xi) = (2\pi)^n \frac{\mathrm{i}^{|\alpha|}}{(-1)^{|\alpha|}} D^\alpha \delta(\xi) = (2\pi)^n (-\mathrm{i})^{|\alpha|} \cdot D^\alpha \delta(\xi).$$

Remarcăm că formulele (10), (11) corespunzătoare distribuţiilor din S' sînt valabile şi pentru distribuţiile din spaţiul $K'(R^n)$. În acest caz transformata Fourier este definită prin formula de tip Parseval :

$$(\hat{f}, \hat{\varphi}) = (2\pi)^n (f, \varphi), \tag{13}$$

unde $f \in K'(R^n)$, $\varphi \in K(R^n)$, iar $\hat{\varphi}$ reprezintă transformata Fourier a funcţiei φ şi este definită prin formula :

$$\hat{\varphi}(s) = \int_{R^n} \varphi(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x,\, s)}\, \mathrm{d}x \tag{14}$$

în care $s = (\xi_1 + \mathrm{i}\tau_1, \xi_2 + \mathrm{i}\tau_2, \ldots, \xi_n + \mathrm{i}\tau_n)$ este variabilă complexă iar $(x, s) = \sum_{j=1}^{n} x_j s_j$, $s_j = \xi_j + \mathrm{i}\tau_j$. Notînd cu Z transformata Fourier a spaţiului $K(Z = \hat{K})$ conform formulei (14) vom defini convergenţa către zero a şirului $(\psi_j)_{j \in N} \in Z$ prin convergenţa la zero în spaţiul $K(R^n)$ a şirului $\varphi_j = F^{-1}[\psi_j]$, unde

$$F^{-1}[\psi_j] = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \psi_j(s) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x,\, s)}\, \mathrm{d}\xi \tag{15}$$

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in R^n$. Deci $\psi_j \to 0$ în Z dacă $\varphi_j \to 0$ în K. În acest fel transformata Fourier $\hat{f}$ a distribuţiei $f \in K'(R^n)$ va fi o funcţională liniară şi continuă pe spaţiul Z. Mulţimea acestor funcţionale se va nota Z' şi în consecinţă $\hat{f} \in Z'$ reprezintă o distribuţie definită pe spaţiul Z. Transformata Fourier inversă este definită prin formula :

$$(F^{-1}[g], \varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n} (g, \hat{\varphi}) \tag{16}$$

unde $g \in Z'$, $\varphi \in K(R^n)$, $\hat{\varphi} = F[\varphi]$ conform formulei (14).

Scanned with OKEN Scanner

§ 2. Transformata Laplace

1. Transformata Laplace pentru funcții și distribuții

Transformata Laplace reprezintă o variantă a transformatei Fourier fapt pentru care între cele două transformate există o strînsă legătură

DEFINIȚIA 1. Numim transformată Laplace a funcției $f:R\to\Gamma$ nulă pentru $t<0$, funcția complexă $L[f]$ de variabilă complexă p definită prin formula :

$$L[f](p)=\tilde{f}=\int_0^{\infty} f(t)\,e^{-pt}\,dt. \tag{1}$$

PROPOZIȚIA 1. *Dacă* $f(t)e^{-pt}\in L^1(R)$ *pentru* $\operatorname{Re} p=\sigma_0$, *atunci transformata Laplace* $L[f]$ *există* $\forall_{p\in\Gamma}\operatorname{Re} p\geqslant\sigma_0$. Într-adevăr, pentru $\operatorname{Re} p=\sigma\geqslant\sigma_0$ avem $e^{-\sigma t}\leqslant e^{-\sigma_0 t}$ și cum

$$f(t)e^{-\sigma_0 t}\in L^1(R) \text{ rezultă } |f(t)e^{-pt}|=|f(t)e^{-\sigma t}|\leqslant|f(t)e^{-\sigma_0 t}|$$

deci $f(t)e^{-\sigma t}\in L^1(R)$ și în consecință $L[f]$ există pentru $\operatorname{Re} p\geqslant\sigma_0$. Marginea inferioară a numerelor reale $\operatorname{Re} p=\sigma_0$ pentru care $f(t)e^{-pt}\in L^1(R)$ se numește abscisa de convergență a funcției f. Dacă $\inf\sigma_0=\alpha$, atunci pentru $\operatorname{Re} p>\alpha$, $L[f]$ există.

DEFINIȚIA 2. Funcțiile $f:R\to\Gamma$ satisfăcînd condițiile :

L_1) $f(t)=0$, $t<0$

L_2) $f(t)$ este continuă cu excepția unui număr finit de punte unde are discontinuități de speța întîia.

L_3) $|f(t)|\leqslant Me^{\sigma_0 t}$, $M>0$, $\sigma_0\geqslant 0$

se numesc funcții original, iar numărul σ_0 se numește indicele de creștere al funcției original. Observăm că abscisa de convergență α a funcției original f este cel mult $\sigma_0(\alpha\leqslant\sigma_0)$. În aceste condițiuni pentru orice funcție original obținem evaluarea :

$$|f(t)e^{-pt}|=|f|e^{-\sigma t}\leqslant Me^{-t(\sigma-\sigma_0)}$$

care ne arată că pentru $\operatorname{Re} p=\sigma>\sigma_0$, membrul drept al inegalității este integrabil. În consecință transformata Laplace a funcțiilor original există în semiplanul $\operatorname{Re} p>\sigma_0$ sînt funcții olomorfe în acest semiplan și avem $|L[f](p)|\leqslant\dfrac{M}{\sigma-\sigma_0}$. Remarcăm că olomorfia funcțiilor original în semiplanul $\operatorname{Re} p>\sigma_0$ implică indefinit derivabilitatea în acest semiplan din care motiv putem scrie formula :

$$L^{(n)}[f](p)=L[(-t)^n f],\quad n=1,2,\ldots. \tag{2}$$

Pentru a pune în evidență dependența dintre transformatele Laplace și Fourier, observăm că formula (1) se poate scrie sub forma :

$$L[f](p)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\sigma t}\cdot e^{-i\tau t}\,dt\quad(p=\sigma+i\tau) \tag{1'}$$

Scanned with OKEN Scanner

și cum $f(t)e^{-\sigma t} \in L^1(R)$, rezultă că membrul drept reprezintă transformata Fourier a acestei funcții în punctul $(-\tau)$.

În consecință pentru $\sigma > \sigma_0$ dependența dintre transformatele Fourier și Laplace este dată de formula:

$$L[f](p) = \widehat{(fe^{-\sigma t})^\vee} = F[f(t)\,e^{-\sigma t}](-\tau) = F[f(-t)e^{\sigma t}] \tag{3}$$

Această legătură dintre cele două transformate permite deducerea formulei (7), III.1.1 de inversare a transformatei Fourier, condițiile de aplicare fiind îndeplinite, obținem:

$$\widehat{F^{-1}[f(-t)e^{\sigma t}]} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} L[f](p)\,e^{-i\tau t}\,d\tau$$

adică

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} L[f](p)\,e^{-pt}\,dp$$

și în consecință:

$$L^{-1}[L[f]] = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} L[f](p)\,e^{pt}\,dp,\ \operatorname{Re} p > \sigma_0 \tag{4}$$

în toate punctele în care $f(t)$ este continuă. Această formulă constituie formula de inversare pentru transformata Laplace.

PROPOZIȚIA 2. *Fie f_1 și f_2 două funcții original având abscisele de convergență s_1 și s_2. Atunci produsul de convoluție $f_1 * f_2$ este o funcție original, având indicele de convergență $s = \max(s_1, s_2)$ și $L[f_1 * f_2] = L[f_1].\,L[f_2]$.*

Demonstrație. În baza condiției L_2) funcțiile f_1 și f_2 sînt local integrabile și conform lui L_1) avem $\operatorname{supp} f_1$, $\operatorname{supp} f_2 \subset [0, \infty)$. De aici rezultă că $f_1 * f_2$ este local integrabilă și $\operatorname{supp} f_1 * f_2 \subset \operatorname{supp} f_1 + \operatorname{supp} f_2 \subset [0, \infty)$. Explicînd produsul de convoluție obținem:

$$(f_1 * f_2)(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \int_0^t f_1(u)\,f_2(t-u)\,du, & t \geqslant 0 \end{cases}$$

de unde pentru $t \geqslant 0$ avem:

$$(f_1 \circledast f_2)(t) = \int_0^t f_1(u) f_2(t-u)\,du$$

conform formulei (1) din II.1.3.

Deoarece f_1e^{-pt}, $f_2e^{-pt} \in L^1(R)$, în baza propoziției 3, II.1.1. $f_1e^{-pt} * f_2e^{-pt} \in L^1(R)$ și avem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f_1e^{-pt} * f_2e^{-pt}]\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1e^{-pt}\,dt.\int_{-\infty}^{\infty} f_2e^{-pt}\,dt = L[f_1].L[f_2] \tag{5}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a arăta că produsul de convoluție $f_1 * f_2$ este o funcție original, observăm că el îndeplinește condițiile L_1)și L_2) fapt pentru care ne vom ocupa de condiția de mărginire exponențială L_3). În acest scop putem scrie :

$$|f_1 \circledast f_2| \leqslant \int_0^t |f_1(u)|\,|f_2(t-u)|\,du \leqslant M_1 M_2 \int_0^t e^{s_1 u} \cdot e^{s_2(t-u)}\,du.$$

Notînd $s = \max(s_1, s_2)$ obținem :

$$|f_1 \circledast f_2| \leqslant M_1 M_2 \int_0^t e^{su} \cdot e^{s(t-u)}\,du = M_1 M_2 e^{st}\,t.$$

Pentru $\varepsilon > 0$ relația precedentă se poate scrie sub forma :

$$|f_1 \circledast f_2| \leqslant M_1 M_2 t e^{-\varepsilon t}\, e^{t(s+\varepsilon)}$$

Deoarece $\sup_{t \in R_+} t\, e^{-\varepsilon t} = e^{-\varepsilon}$, rezultă $|f_1 \circledast f_2| \leqslant M e^{t(s+\varepsilon)}$ unde $M = M_1 M_2\, e^{-\varepsilon}$. În consecință $f_1 * f_2$ este o funcție original și pentru $\operatorname{Re} p > s$ avem : $(f_1 * f_2)e^{-pt} \in L^1(R)$. Dar $(f_1 * f_2)e^{-pt} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u) f_2(t-u)\, e^{-pu}\, e^{-p(t-u)}\,du =$ $= f_1 e^{-pt} * f_2 e^{-pt}$ de unde conform formulei (5) obținem :

$$L[f_1 * f_2] = \int_{-\infty}^{\infty} (f_1 * f_2)\, e^{-pt}\,dt = L[f_1]\,L[f_2].$$

Pe baza definiției transformatei Laplace se stabilesc ușor formulele :

$$\begin{aligned} L[f(kt)] &= \frac{1}{k} L[f(t)]\left(\frac{p}{k}\right), \quad k > 0 \\ L[\tau_a f] &= e^{-ap} L[f], \qquad a \in R. \end{aligned} \tag{6}$$

Dacă funcția original este derivabilă, deci $f \in C^1(R_+)$, atunci avem :

$$L[f'] = pL[f] - f(0+t). \tag{7}$$

Pe baza acesteia rezultă pentru orice funcție original :

$$L\left[\int_0^t f(\xi)\,d\xi\right] = \frac{1}{p} L[f]. \tag{8}$$

Exemplul 1. Fie $f(t) = \theta(t)e^{\alpha t}$ și $g(t) = \theta(t)te^{\alpha t}$. Atunci au loc formulele :

$$f^{*n} = \underbrace{f * f * \ldots * f}_{n} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,\theta(t)\, e^{\alpha t} \tag{9}$$

$$g^{*n} = \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}\,\theta(t)\, e^{\alpha t} \tag{10}$$

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, deoarece $L[\theta e^{\alpha t}] = \frac{1}{p-\alpha}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\alpha$ avem $L[f^{*n}] = (L[f])^n = \frac{1}{(p-\alpha)^n}$, de unde prin derivare obținem:

$$L[\theta t^{n-1} e^{\alpha t}] = \frac{(n-1)!}{(p-\alpha)^n} \quad \text{deci} \quad L[f^{*n}] = L\left[\frac{t^{n-1}\theta\, e^{\alpha t}}{(n-1)!}\right].$$

Prin aplicarea transformatei Laplace inversă găsim formula (9). Analog, deoarece $L[g] = \frac{1}{(p-\alpha)^2}$, obținem $L[g^{*n}] = \frac{1}{(p-\alpha)^{2n}} = L\left[\frac{t^{2n-1}\theta e^{\alpha t}}{(2n-1)!}\right]$, de unde prin intermediul transformatei Laplace inversă avem formula (10).

Exemplul 2. Fie $f_n(t) = \theta(t)t^n$, $n \in N_0$. Atunci avem:

$$f_n * f_m = \frac{n!\,m!}{(n+m+1)!} f_{n+m+1}. \tag{11}$$

Deoarece $L[\theta] = \frac{1}{p}$, prin derivare în raport cu p, obținem:

$$L[(-t)^n\theta] = \frac{n!}{p^{n+1}}, \text{ de unde relația:}$$

$$L([f_n * f_m] = L[f_n]\,L[f_m] = \frac{n!\,m!}{p^{n+m+2}} = \frac{n!\,m!}{(n+m+1)!} L[f_{n+m+1}].$$

Din această relație rezultă formula (11).

Observație. Dacă $f(t) = \theta t^\alpha$, $\alpha \in R$, $\alpha > -1$ atunci

$$L[\theta t^\alpha] = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha+1), \ \operatorname{Re} p > 0. \tag{12}$$

Într-adevăr, considerînd p real, obținem:

$$L[f](p) = \int_0^\infty t^\alpha e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_0^\infty z^\alpha e^{-z}\,dz$$

după efectuarea schimbării de variabilă $pt = z$.

Dar cum $\int_0^\infty z^\alpha e^{-z}\,dz = \Gamma(\alpha+1)$, (funcția lui Euler de speța a doua) găsim formula (12). Se poate arăta că formula rămîne valabilă și cînd p este complex.

Transformata Laplace pentru distribuții. Formula de definiție (1) a transformatei Laplace se poate extinde și în cazul distribuțiilor. În acest scop avem:

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 3. Fie $f \in K'_+(R)$ o distribuție din $K'(R)$ și cu suportul în $[0, \infty)$. Dacă există $\sigma_0 \in R$ astfel încît pentru $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, $e^{-\sigma t} f \in S'(R)$, atunci expresia :

$$L[f](p) = (f, e^{-pt}) \tag{13}$$

reprezintă transformata Laplace a distribuției $f \in K'_+(R)$, definită pentru $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$.

Deoarece $e^{-pi} \in C^\infty(R)$ în raport cu t, expresia de definiție a transformatei Laplace nu are sens pentru orice distribuție $f \in K'_+(R)$.

Justețea definiției date transformatei Laplace rezultă din următoarele : $\forall\ \sigma_0 < \sigma_1 < \sigma$ avem $e^{-\sigma_1 t} f(t) \in S'$. Pentru $\alpha \in C^\infty(R)$ cu proprietatea $\sigma_1, \sigma \in R$ $\operatorname{supp} f \subset \operatorname{supp} \alpha \subset [0, \infty)$ și $\alpha = 1$ pe vecinătatea suportului distribuției f, avem :

$$\alpha(t) e^{-(p-\sigma_1)t} \in S, \text{ deoarece } \alpha(t) e^{-(\sigma-\sigma_1)t} \in S \text{ și } e^{-i\tau t} \in C^\infty(R).$$

În consecință, deoarece :

$$(f, e^{-pt}) = (f e^{-\sigma_1 t}, \alpha(t) e^{-(p-\sigma_1)t})$$

și $f e^{-\sigma_1 t} \in S'$, $\alpha(t) e^{-(p-\sigma_1)t} \in S$ rezultă că expresia considerată definește o distribuție pe spațiul S, deci formula (13) are sens. Imaginea Laplace $L[f](p)$ astfel definită reprezintă o funcție olomorfă de variabilă complexă p în semiplanul $\operatorname{Re} p > \sigma_0$.

În baza definiției derivatei distribuțiilor obținem :

$$\frac{d^n}{dp^n} L[f](p) = (f, (-t)^n e^{-pt})$$

deci

$$L[(-t)^n f(t)](p) = L^n[f](p). \tag{14}$$

Menționăm de asemenea că proprietățile (6) ale transformatei Laplace se mențin și în cazul distribuțiilor.

În legătură cu transformata Laplace a produsului de convoluție a două distribuții avem :

PROPOZIȚIA 3. *Dacă distribuțiile $f, g \in K'_+$ au transformate Laplace, respectiv pentru $\operatorname{Re} p > \sigma_1$, $\operatorname{Re} p > \sigma_2$, atunci $f * g$ are transformată Laplace pentru $\operatorname{Re} p > \max(\sigma_1, \sigma_2)$ și*

$$L[f * g] = L[f] L[g]. \tag{15}$$

Demonstrație. Evident, deoarece $\operatorname{supp} f$, $\operatorname{supp} g \subset [0, \infty)$, produsul de convoluție $f * g$ există și $\operatorname{supp} f * g \subset [0, \infty)$. Dar $L[f]$ și $L[g]$ există simultan pentru $\operatorname{Re} p = \sigma > \max(\sigma_1, \sigma_2)$.

În consecință, conform formulei (8), II.2.2. pentru $\operatorname{Re} p > \max(\sigma_1, \sigma_2)$ avem :

$$e^{-\sigma t}(f * g) = e^{-\sigma t} f * e^{-\sigma t} g$$

Scanned with OKEN Scanner

și cum $e^{-\sigma t}f, e^{-\sigma t}g \in S'$ rezultă $e^{-\sigma t} f * e^{-\sigma t}g \in S'$, deci $f * g$ admite transformată Laplace. Astfel putem scrie :

$$(f * g, e^{-pt}) = (f_x \times g_y, e^{-p(x+y)}) = (f_x, e^{-px})(f_y, e^{-py}) = L[f]\,L[g].$$

Cu aceasta propoziția este demonstrată.

Astfel, de exemplu, dacă distribuția $f \in K'_+$ admite transformată Laplace, atunci :

$$L[f * \delta^{(n)}] = L[f]L[\delta^{(n)}] = p^n L[f]. \tag{16}$$

Exemplul 3. Fie ecuația în spațiul distribuțiilor :

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{17}$$

și distribuția :

$$u = \frac{1}{\sqrt{\rho\mu}} f(t) * \theta\left(t - y\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}\right), \tag{18}$$

unde $\rho, \mu \in R^+$, $y \geqslant 0$ este un parametru, θ distribuția lui Heaviside, iar $f \in K'_+$ o distribuție ce admite transformată Laplace. Să arătăm că distribuția definită de relația (18) este o soluție a ecuției (17).

Într-adevăr, aplicînd transformata Laplace ecuației (17) în raport cu variabila t, obținem ecuația diferențială ordinară :

$$\mu \frac{d^2\tilde{u}}{dy^2} - \rho p^2 \tilde{u} = 0, \tag{17'}$$

unde $\tilde{u}(p, y) = L[u(t, y)]$.

Dar $L[u] = \frac{1}{\sqrt{\rho\mu}} L[f]\, L\left[\theta\left(t - y\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}\right)\right] = \frac{\tilde{f}(p)}{\sqrt{\rho\mu}} \frac{1}{p} e^{-y\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}p}$ deoarece

$L\left[\theta\left(t - y\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}\right)\right] = \frac{1}{p} e^{-y\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}p}$.

În consecință, prin derivare, obținem :

$$\mu \frac{d^2\tilde{u}}{dy^2} = \mu \frac{\tilde{f}(p)}{p\sqrt{\rho\mu}} \frac{\rho}{\mu} p^2 e^{-y\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}p} = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}\, p \tilde{f}(p) e^{-y\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}p}$$

care substituită în (17') ne arată că distribuția (18) reprezintă o soluție pentru ecuația (17).

§ 3. Distribuții periodice

1. Introducere

Funcțiile periodice constituie una din clasele de funcții care datorită proprietăților lor intervin frecvent în diverse probleme teoretice și prac-

tice. Un mijloc de reprezentare și de studiu a acestor funcții o constituie dezvoltarea în serie Fourier. Dintre dificultățile ce se întîlnesc în studiul seriilor Fourier este și aceea că seria Fourier asociată unei funcții periodice nu converge întotdeauna către funcția periodică respectivă. Prin introducerea distribuțiilor periodice ca o generalizare a funcțiilor periodice, se depășesc o serie de dificultăți din teoria seriilor Fourier, elaborîndu-se în acest fel o teorie generală și unitară a seriilor Fourier. Un prim rezultat este și acela că în spațiul distribuțiilor orice serie Fourier asociată unei distribuții periodice converge către distribuția respectivă. În acest fel problema convergenței seriilor Fourier nu se mai pune, avînd astfel posibilitatea de a reprezenta prin serii Fourier atît funcțiile local integrabile cît și sarcinile exprimate prin distribuții periodice. Studiul seriilor Fourier de distribuții periodice se poate realiza prin definirea distribuțiilor pe torul n dimensional (T^n), sau cu ajutorul transformatei periodice a unei distribuții cu suport compact și a partiției periodice a unității din spațiul $K(R^n)$.

2. Funcții periodice, transformata periodică și partiția periodică a unității

DEFINIȚIA 1. Spunem că funcția $f: R^n \to \Gamma$ este o funcție periodică dacă: $\exists_{\substack{T \in R^n \\ T \neq 0}} \ \forall_{x \in R^n} \ \tau_T f = f$.

Vectorul $T \in R^n$ se numește perioada funcției f. Din definiție rezultă că mulțimea perioadelor funcției f este kT, $k \in Z$.

Cea mai mică perioadă pozitivă ($T > 0$) se numește perioada fundamentală a funcției f. În cele ce urmează vom considera perioada fundamentală relativ la o funcție dacă nu vom face altă precizare. În particular dacă f este o funcție local integrabilă atunci ea se va considera periodică dacă relația (*1*) este îndeplinită a. p. t.

Se verifică imediat că suma, diferența, produsul și cîtul a două funcții periodice de perioadă T sînt funcții periodice de aceeași perioadă. Remarcăm că relația (1) exprimă periodicitatea funcției f în raport cu ansamblul variabilelor $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$. Evident că aceasta nu implică periodicitatea funcției în raport cu fiecare variabilă în parte. Din acest motiv introducem:

DEFINIȚIA 2. Spunem că funcția $f: R^n \to \Gamma$ este periodică în raport cu variabila x_i, dacă $\exists_{T_i \in R^+} \ \forall_{x \in R^n} \ \tau_{T^i} f = f$, unde $T^i = (0, 0, \ldots, T_i, 0, \ldots, 0) \in R^n$.

Numărul $T_i > 0$ se numește perioada funcției f în raport cu variabila x_i. Din definiție rezultă că funcția f este periodică în raport cu variabila x_i dacă admite perioada T^i. Dacă funcția f este periodică în raport cu fiecare variabilă de perioadă $T^i (i = 1, 2, \ldots, n)$, atunci funcția f este periodică în raport cu ansamblul variabilelor, adică periodică de perioadă $T = (T_1, T_2, \ldots, T_n) \in R^n$.

Reciproca în general nu este adevărată. În continuare la funcțiile periodice de mai multe variabile, dacă nu vom face altă specificație, vom înțelege funcții periodice în raport cu fiecare variabilă.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu. Fie vectorii : $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, $K = (K_1, K_2, \ldots, K_n) \in Z^n$, $\omega_K = (\omega_1 K_1, \omega_2 K_2, \ldots, \omega_n K_n)$, $T_K = (T_1 K_1, T_2 K_2, \ldots, T_n K_n)$, unde $\omega_i = \dfrac{2\pi}{T_i}$, $T_i > 0$. Atunci funcția $f : R^n \to \Gamma$ dată prin formula :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e^{i(\omega_K, x)} \quad i = \sqrt{-1} \tag{2}$$

unde $(\omega_K, x) = \omega_1 K_1 x_1 + \omega_2 K_2 x_2 + \ldots + \omega_n K_n x_n$ este o funcție periodică în raport cu fiecare variabilă de perioadă $T_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. Într-adevăr notînd $T^i = (0, 0, 0 T_i, 0, \ldots, 0)$, deoarece $(\omega_K, T^i) = \omega_i K_i T_i = 2\pi K_i$ și $e^{i(\omega_K, T^i)} = 1$ avem :

$$\tau_{T^i} f = \exp [i(\omega_K, x - T^i)] = \exp [i(\omega_K, x)] \exp [-i(\omega_K, T^i)] = f.$$

În consecință funcția considerată este periodică în raport cu ansamblul variabilelor și de perioadă $T = (T_1, T_2, \ldots, T_n)$, deoarece $\tau_T f = f$. Remarcăm că deoarece

$$(\omega_K, T_K) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i T_i K_i^2 = 2\pi \sum_{i=1}^{n} K_i^2 \quad \text{și} \quad \exp (\omega_K, T_K) = 1$$

funcția f definită de relația (2) admite în general perioada T_K deoarece avem :

$$\tau_{T_K} f = \exp [i(\omega_K, x - T_K)] = \exp [i(\omega_K, x)] \exp [- i(\omega_K, T_K)] = f.$$

În general dacă o funcție $f : R^n \to \Gamma$ admite ca perioadă vectorul T_K definit mai înainte atunci funcția f este periodică în raport cu fiecare variabilă de perioadă $T^i = (0, 0, \ldots, 0, T_i, 0, \ldots, 0)$. Vectorul $\omega \in R^n$ definit mai sus reprezintă frecvența funcției periodice iar $\omega_i = \dfrac{2\pi}{T_i}$ $(T_i > 0)$ frecvența relativă la perioada T_i corespunzătoare variabilei x_i. Astfel, de exemplu, să considerăm funcția :

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \exp [2\pi i(K, x)], \quad K \in Z^n, \; x \in R^n.$$

Se constată ușor că această funcție este periodică în raport cu ansamblul variabilelor și are perioada $T_0 = \overline{K} = (\overline{K}_1, \overline{K}_2, \ldots, \overline{K}_n) \in Z^n$. Într-adevăr, deoarece $\exp [-2\pi i(K, \overline{K})] = 1$ avem :

$$\tau_{T_0} g = \exp [2\pi i(K, x - \overline{K})] = \exp [2\pi i(K, x)] \exp [-2\pi i(K, \overline{K})] = g.$$

Perioada fundamentală a funcției g fiind vectorul $T = (1, 1, \ldots, 1)$.

DEFINIȚIA 3. Fie funcția $f : R^n \to \Gamma$ cu $\operatorname{supp} f$ compact. Numim transformata periodică a funcției f, funcția :

$\omega_T f : R^n \to \Gamma$ definită prin relația :

$$\tilde{f}_T(x) = \omega_T f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{K \in Z^n} \tau_{T_K} f, \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $T_K = (T_1K_1, T_2K_2, \ldots, T_nK_n)$, $K = (K_1, K_2, \ldots K_n) \in Z^n$,

$$T = (T_1, T_2, \ldots, T_n), \quad T_i > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Remarcăm că suma din expresia (3) are un număr finit de termeni nenuli deoarece f are suport compact.

PROPOZIȚIA 1. *Fie funcția* $f : R^n \to \Gamma$ *cu suport compact. Atunci transformata ei periodică* $\omega_T f$ *este o funcție periodică de perioadă* $T_K = (T_1K_1, T_2K_2, \ldots, T_nK_n)$, $T_i > 0$, $K \in Z^n$.

Într-adevăr, putem scrie :

$$\tau_{T_K}(\omega_T f) = \tau_{T_K}\Big(\sum_{K' \in Z^n} \tau_{T_{K'}} f\Big) = \sum_{K' \in Z^n} \tau_{T_{K'}}(\tau_{T_K} f) =$$

$$= \sum_{K + K' \in Z^n} \tau_{T_{K+K'}} f = \sum_{K'' \in Z^n} \tau_{T_{K''}} f = \omega_T f \tag{4}$$

ceea ce demonstrează propoziția.

Prin alegerea convenabilă a lui $K \in Z^n$ deducem că funcția considerată f admite perioada $T_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ în raport cu variabila x_i, în consecință este o funcție periodică în raport cu ansamblul variabilelor cu perioada $T = (T_1, T_2, \ldots, T_n)$.

PROPOZIȚIA 2. *Fie funcția cu suport compact* $f : R^n \to \Gamma$. *Atunci* $\forall_{\lambda \in R^n}$ *avem relația* :

$$\tau_\lambda(\omega_T f) = \omega_T(\tau_\lambda f). \tag{5}$$

Într-adevăr, în baza definiției transformatei periodice a unei funcții cu suport compact, avem :

$$\omega_T(\tau_\lambda f) = \sum_{K \in Z^n} \tau_{T_K}(\tau_\lambda f) = \tau_\lambda\Big(\sum_{K \in Z^n} \tau_{T_K} f\Big) = \tau_\lambda(\omega_T f).$$

PROPOZIȚIA 3. *Fie funcțiile* $f, g : R^n \to \Gamma$ *local integrabile cu* supp (f, g) *compact. Atunci* :

$$(\omega_T f, g) = (f, \omega_T g). \tag{6}$$

Demonstrație. Avem $(\omega_T f, g) = \sum_{K \in Z^n} \int_{R^n} f(x - T_K) g(x)\, dx =$

$$= \sum_{K \in Z^n} \int_{R^n} f(y)\, g(y + T_K)\, dy$$

după efectuarea schimbării de variabile $y = x - T_K$. Deoarece

$$\sum_{K \in Z^n} \int_{R^n} f(y)\, g(y + T_K)\, dy = \sum_{K \in Z^n} \int_{R^n} f(y)\, g(y - T_K)\, dy$$

Scanned with OKEN Scanner

obținem :

$$(\omega_T f, g) = \int_{R^n} f(y) \left[\sum_{K \in Z^n} g(y - T_K) \right] dy = \int_{R^n} f(y)\, \omega_T g\, dy = (f, \omega_T g).$$

Observație. Dacă $\varphi \in K(R^n)$, atunci $\omega_T \in C^\infty(R^n)$ și este o funcție periodică de perioadă T. În particular pentru $\varphi \in K(R)$ avem :

$$\omega_T \varphi(x) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \tau_{T_K} \varphi = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \varphi(x - KT),\ K \in Z,\ T \in R^+. \tag{7}$$

Mulțimea funcțiilor periodice indefinit derivabile se va nota $\mathscr{P}(R^n)$. Evident $\forall_{\varphi \in K(R^n)}$ avem $\omega_T \varphi \in \mathscr{P}(R^n)$, de unde rezultă că mulțimea de funcții $\mathscr{P}(R^n)$ este o submulțime a lui $\mathscr{E}(R^n)$.

PROPOZIȚIA 4. *Fie funcțiile* $f : R^n \to \Gamma$ *cu* supp f *compact,* $\tilde{f} = \omega_T f$ *și* $\psi \in K(R^n)$. *Are loc relația :*

$$\omega_T(\psi \tilde{f}) = \tilde{f}\, \omega_T \psi. \tag{8}$$

Demonstrație. Conform propoziției 1 funcția $\tilde{f} = \omega_T f$ este o funcție periodică de perioadă T_K și avem $\tau_{T_K} \tilde{f} = \tau_{T_K}(\omega_T f) = \tilde{f}$.

În consecință, putem scrie :

$$\omega_T(\psi \tilde{f}) = \sum_{K \in Z^n} \tau_{T_K}(\psi \tilde{f}) = \sum_{K \in Z^n} (\tau_{T_K} \psi)\, (\tau_{T_K} \tilde{f}) =$$

$$= \tilde{f} \sum_{K \in Z^n} \tau_{T_K} \psi = \tilde{f}\, \omega_T \psi.$$

DEFINIȚIA 4. Funcția $u_T \in K(R^n)$ cu proprietatea $\omega_T u_T = 1$ se numește partiție periodică a unității în spațiul $K(R^n)$.

Pentru a arăta existența unor asemenea elemente în spațiul $K(R^n)$ să considerăm de exemplu funcția ρ_ε definită prin relația 7 din I.4.2. Deoarece $\rho_\varepsilon \geqslant 0$ și supp $\rho_\varepsilon = \{x,\ x \in R^n,\ \|x\| \leqslant \varepsilon\}$ vom alege $T > 0$, $T \in R^n$, astfel încît $\|T\| < 2\varepsilon$. În acest fel $\forall_{x \in R^n}$ avem $\omega_T \rho_\varepsilon > 0$ deci funcția $U_T = \dfrac{\rho_\varepsilon}{\omega_T \rho_\varepsilon} \in K(R^n)$. Să arătăm că funcția construită U_T, are proprietatea $\omega_T U_T = 1$. Într-adevăr, deoarece funcția $\omega_T \rho_\varepsilon$ este periodică rezultă că și funcția $\dfrac{1}{\omega_T \rho_\varepsilon} \in K(R^n)$ este periodică și are aceeași perioadă.

În baza propoziției 4, obținem :

$$\omega_T U_T = \omega_T \left(\frac{\rho_\varepsilon}{\omega_T \rho_\varepsilon} \right) = \frac{1}{\omega_T \rho_\varepsilon} \cdot \omega_T \rho_\varepsilon = 1,$$

Scanned with OKEN Scanner

adică funcția $U_T \in K(R^n)$ reprezintă o partiție periodică a unității în $K(R^n)$. Cu ajutorul partiției periodice a unității putem pune în evidență structura funcțiilor periodice de clasă $C^\infty(R^n)$. Are loc:

PROPOZIȚIA 5. *Orice funcție periodică de clasa $C^\infty(R^n)$ reprezintă transformata periodică a unei funcții din spațiul $K(R^n)$.*

Demonstrație. Fie $\tilde{\varphi} \in \mathscr{P}(R^n)$ o funcție periodică de perioadă T și de clasă $C^\infty(R^n)$ și U_T partiția periodică a unității din $K(R^n)$ corespunzătoare perioadei T.

Observăm că deoarece U_T are suportul compact, funcția $\psi = U_T\tilde{\varphi} \in K(R^n)$ și în baza propoziției 4 obținem:

$$\omega_T\psi = \omega_T(U_T\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi}\omega_T U_T = \tilde{\varphi}$$

ceea ce demonstrează propoziția enunțată.

În consecință operatorul $\omega_T : K(R^n) \to \mathscr{P}(R^n)$ aplică spațiul $K(R^n)$ pe $\mathscr{P}(R^n)$, deci $\omega_T(K(R^n)) = \mathscr{P}(R^n)$.

Transformatei periodice a funcțiilor i se poate da și o interpretare geometrică. În acest scop să considerăm configurația geometrică constituită din n cercuri $C_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ tangente unei drepte Δ într-un punct O și situate în plane distincte P_i ce trec prin dreapta Δ (fig. 9).

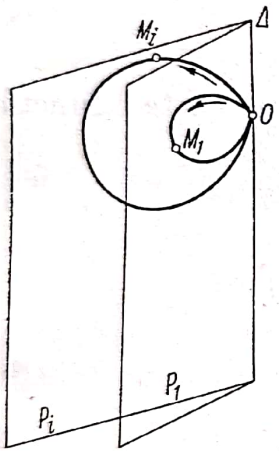

Fig. 9

Alegînd punctul O originea măsurării arcelor pe cele n cercuri și considerînd sensul pozitiv pe cercuri, sensul direct, atunci poziția unui punct M_i pe cercul C_i este determinată prin numărul s_i, unde $s_i = s_i^0 + k_i T_i$, $0 \leqslant s_i^0 \leqslant T_i$, $k_i \in Z$, $i = 1, 2, \ldots, n$, T_i lungimea cercului C_i iar $\overset{\frown}{OM}_i = s_i^0$.

În acest fel poziția ansamblului constituit din cele n cercuri este determinat prin arcele $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Acest ansamblu de n cercuri se va numi tor n dimensional (T^n), iar un punct M^* al torului corespunde unei poziții a celor n cercuri și se determină prin coordonatele $x_i = s_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Notînd $T = (T_1, T_2, \ldots, T_n)$ și $T_k = (T_1 K_1, T_2 K_2, \ldots, T_n K_n)$, $K \in Z^n$ punctul $M^* \in (T^n)$ al torului va avea coordonatele $M^*(s + T_K)$ unde $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$.

Fie funcția $f : (T^n) \to \Gamma$ definită pe torul $(T^n) = [0, T_1] \times \ldots \times [0, T_n]$, $T_i > 0$. Acestei funcții îi asociem funcția $\tilde{f} : R^n \to \Gamma$ definită prin relația: $\tilde{f}(x) = f(M^*)$, $M^* \in (T^n)$, $x \in R^n$ și $x = s + T_K$, originea spațiului R^n considerîndu-se originea O a torului (T^n).

Se constată imediat că funcția $\tilde{f}$ este periodică avînd perioada $T = (T_1, T_2, \ldots, T_n)$ în raport cu ansamblul variabilelor și are perioada $T^i = (0, 0, \ldots, 0, T_i, 0, \ldots, 0)$ în raport cu variabila x_i. Evident că funcția periodică $\tilde{f}$ admite și perioada T_K deoarece avem $\tau_{T_K}\tilde{f} = \tilde{f}$.

Reciproc, fiecărei funcții periodice $\tilde{f}$ de perioadă $T > 0$ îi corespunde o singură funcție f definită pe torul (T^n). Astfel funcției $f : (T^n) \to \Gamma$ definită pe tor îi corespunde funcția periodică $\tilde{f} = \omega_T f_1$ pe R^n unde

$$f_1 = \begin{cases} f, & x \in (T^n) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Putem spune că funcția periodică $\tilde{f}$ s-a obținut prin prelungirea prin periodicizare a funcției f definită pe tor. În baza propoziției 5 deducem că orice funcție periodică indefinit derivabilă se obține prin prelungirea periodică a unei funcții indefinit derivabile definită pe tor.

3. Serii trigonometrice și distribuții periodice Transformata periodică a distribuțiilor

Fie $(f_i)_{i\in N}$ un șir de distribuții din $K'(R^n)$ și seria de distribuții $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$.

DEFINIȚIA 1. Spunem că seria de distribuții $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ este convergentă în $K'(R^n)$ dacă $\forall_{\varphi\in K(R^n)}$ seria numerică $\sum_{i=1}^{\infty} (f_i, \varphi)$ este convergentă.

PROPOZIȚIA 1. *Dacă distribuția $f\in K'(R^n)$ este suma seriei $\sum_{i=1} f_i$, atunci* $\sum_{i=1}^{\infty} D^\alpha f_i = D^\alpha f$.

Într-adevăr, deoarece $\sum_{i=1}^{\infty} f_i = f$ atunci $S_p = \sum_{i=1}^{p} f_i \xrightarrow{p} f$, deci $\forall_{\varphi\in K(R^n)}$ avem $(S_p, \varphi)\xrightarrow{p} (f, \varphi)$. Pe baza continuității derivatei obținem $(D^\alpha S_p, \varphi)\xrightarrow{p}(D^\alpha f, \varphi)$, adică $\sum_{i=1}^{\infty} D^\alpha f_i = D^\alpha f$.

PROPOZIȚIA 2. *Fie $(U_i)_{i\in N}$ funcții local integrabile pe R^n. Dacă seria $\sum_{i=1}^{\infty} U_i(x)$ converge uniform către $S(x)$ pe orice compact, atunci ea este convergentă în $K'(R^n)$ împreună cu seria derivatelor termenilor, oricare ar fi ordinul de derivare.*

Demonstrație. Fie $S_p(x) = \sum_{i=1}^{\infty} U_i(x)$ suma parțială a seriei considerate. Deoarece $S_p(x) \overset{u}{\Rightarrow} S(x)$ pentru $\|x\| \leqslant R$, $R > 0$, iar $S_p(x)$ și $S(x)$ fiind funcții local integrabile, definesc distribuții regulate, conform propoziției 1, I.5., distribuția $S_p \to S$ în $K'(R^n)$.

În consecință, $D^\alpha S_p = \sum_{i=1}^{p} D^\alpha U_i \xrightarrow{p} D^\alpha S$ în $K'(R^n)$ pe baza continuității operației de derivare din K' în K'.

Fie seria trigonometrică:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{ik\omega x} \; ; \; \omega = \frac{2\pi}{T}, \; T\in R^+, \; a_k \in \Gamma, \; k\in Z, \; x\in R. \tag{1}$$

PROPOZIȚIA 3. *Dacă coeficienții a_k ai seriei $\sum_{K=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{ik\omega x}$ sînt mărginiți în modul, pentru $k\to\infty$, de $A|k|^p$, $A>0$, $p\in N$, atunci seria trigonometrică converge în $K'(R)$ către o anumită distribuție.*

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Considerăm seria :

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{a_k\, e^{ik\omega x}}{(ik\omega)^{p+2}} + a_0 \frac{x^{p+2}}{(p+2)!}. \tag{2}$$

Deoarece

$$\left| \frac{a_k\, e^{ik\omega x}}{(ik\omega)^{p+2}} \right| \leqslant \frac{A}{\omega^{p+2} |k|^2}$$

seria considerată este uniform convergentă și suma ei este o funcție continuă $f(x)$. Conform propoziției 2, seria (2) converge către f în $K'(R)$, deci

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{a_k\, e^{ik\omega x}}{(ik\omega)^{p+2}} + a_0 \frac{x^{p+2}}{(p+2)!} = f(x). \tag{3}$$

În consecință derivata de ordinul $p+2$ a seriei (2) ne dă

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\omega x} = f^{(p+2)}(x) + a_0.$$

Cu aceasta propoziția este demonstrată.

Rezultă că suma seriei (1) este egală cu suma dintre o constantă și derivata de un anumit ordin a unei funcții continue.

Exemplul 1. Fie seria

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\omega x} \; ; \; \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad T \in R^+, \; x \in R, \; k \in Z. \tag{4}$$

Deoarece $a_k = 1$, această serie este convergentă în $K'(R)$ și fie $f \in K'(R)$ suma ei. Avem deci

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\omega x} = f(x).$$

Pentru determinarea distribuției f vom dezvolta în serie Fourier funcția periodică $f_T(x)$ (fig. 10) generată de funcția

$$f_0(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{T}; \; x \in [0, T]$$

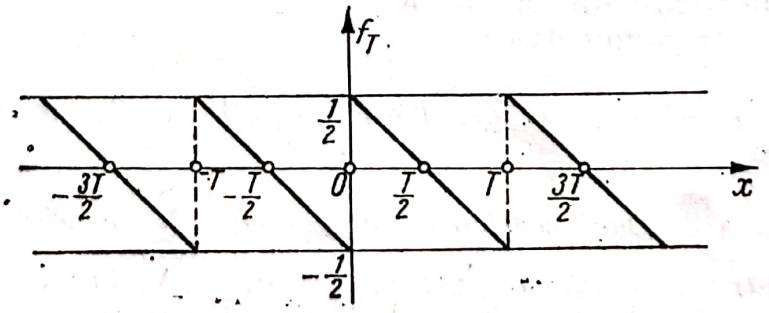

Fig. 10

Seria Fourier corespunzătoare funcției f_T este:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(f_T)\, e^{i\omega kx}, \text{ unde } C_k(f_T) = \frac{1}{T}\int_0^T f_0(x)\, e^{-i\omega kx}\, dx,$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Obținem astfel $C_0(f_T) = 0$, $C_k(f_T) = -\frac{i}{2\pi k}$, $k \neq 0$, $i = \sqrt{-1}$.

În consecință, avem:

$$f_T(x) = -\frac{i}{2\pi}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{e^{ik\omega x}}{k}. \tag{5}$$

Deoarece funcția f_T în punctele de discontinuitate $x_k = kT$, $k \in Z$, are salturile egale cu unitatea, în baza corolarului 1 din I.5., derivata ei în sensul distribuțiilor are expresia:

$$f_T' = -\frac{1}{T} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{kT}.$$

Prin derivarea egalității (5) ținînd seamă de relația (6) obținem:

$$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega kx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{kT}. \tag{7}$$

Din această ultimă egalitate, prin derivare de p ori în sensul distribuțiilor, găsim relația:

$$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} (i\omega k)^p\, e^{i\omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{kT}^{(p)}. \tag{8}$$

Menționăm că identitățile (7) și (8) permit determinarea sumei unor serii divergente în sens obișnuit dar convergente în sensul teoriei distribuțiilor.

Astfel, de exemplu, deoarece $\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega kx} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(e^{i\omega kx} + e^{-i\omega kx})$ din seria trigonometrică (7) obținem formula:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos \omega kx = -\frac{1}{2} + \frac{T}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{kT}. \tag{9}$$

O altă aplicație a egalității (7) o constituie și formula de sumare a lui Poisson.

Exemplul 2. Dacă $\varphi \in S(R)$ atunci are loc formula de sumare, a lui Poisson, anume:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(k) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi k),\ k \in Z,\ \hat{\varphi} = F[\varphi]. \tag{10}$$

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, dacă $\hat{\varphi} = F[\varphi]$ reprezintă transformata Fourier a funcției $\varphi \in S(R)$, avem :

$$\hat{\varphi}(\omega k) = (\varphi(x), e^{i\omega kx}) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{i\omega kx}\, dx.$$

În consecință, pentru $\underset{\varphi \in S(R)}{\forall}$ în baza identității (7), obținem egalitatea :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\omega k) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(kT).$$

Pentru $T=2\pi$ și $\omega=1$ obținem formula lui Poisson (10). Remarcăm că analogul acestei formule în R^n, este dată de egalitatea :

$$\sum_{k \in Z^n} \hat{\varphi}(k) = (2\pi)^n \sum_{k \in Z^n} \varphi(2\pi k), \quad k \in Z^n.$$

DEFINIȚIA 2. Spunem că distribuția $f \in K'(R^n)$ este o distribuție periodică dacă $\underset{\substack{T \in R^n \\ T \neq 0}}{\exists} \tau_T f = f$.

Vectorul $T \in R^n$ se numește perioadă a distribuției $f \in K'(R^n)$. În baza acestei definiții o distribuție periodică $f \in K'(R^n)$ pentru $\underset{\varphi \in K(R^n)}{\forall}$ satisface relația :

$$(f, \varphi) = (\tau_T f, \varphi) = (f, \varphi(x + T)). \tag{11}$$

Evident, această relație poate fi considerată ca definiție a distribuțiilor periodice.

Din definiția distribuțiilor periodice rezultă imediat relația

$$\tau_{-T} f = \tau_T f \tag{12}$$

Într-adevăr, $\underset{\varphi \in K(R^n)}{\forall}$ avem $(\tau_T f, \varphi) = (f, \tau_{-T}(\tau_T \varphi)) = (\tau_{-T} f, \tau_{-T} \varphi) = (f, \tau_{-T} \varphi)$ de unde rezultă relația cerută.

Din (12) se deduce proprietatea :

$$(\tau_T f, \varphi) = (f, \tau_{-Tk} \varphi), \quad \underset{\substack{\varphi \in K(R^n) \\ k \in Z^n}}{\forall}. \tag{13}$$

DEFINIȚIA 3. Fie $f \in \mathscr{E}'(R^n)$ o distribuție cu suport compact. Atunci distribuția $\omega_T f$ definită prin formula :

$$(\omega_T f, \varphi) = (f, \omega_T \varphi) \quad \underset{\substack{\varphi \in K(R^n) \\ T \in R^n \\ T \neq 0}}{\forall} \tag{14}$$

se numește transformata periodică a distribuției $f \in \mathscr{E}'(R^n)$.

Scanned with OKEN Scanner

Din (14), deoarece $\omega_T \varphi = \sum_{k \in Z^n} \tau_{T_k} \varphi$ și suma are un număr finit de termeni nenuli, obținem :

$$(\omega_T f, \varphi) = \sum_{k \in Z^n} (f, \tau_{T_k} \varphi) = \sum_{k \in Z^n} (f, \underline{\tau}_{T_k} \varphi) =$$

$$= \sum_{k \in Z^n} (\tau_{T_R} f, \varphi) = (\sum_{k \in Z^n} \tau_{T_k} f, \varphi)$$

de unde rezultă egalitatea :

$$\omega_T f = \sum_{k \in Z^n} \tau_{T_k} f \tag{14'}$$

suma conținînd un număr finit de termeni, fapt ce rezultă din expresia lui $\omega_T \varphi$, $\varphi \in K(R^n)$.

PROPOZIȚIA 4. *Dacă* $f \in \mathscr{E}'(R^n)$ *atunci* $\omega_T f$ *este o distribuție periodică de perioadă* $T_K = (T_1 k_1, \ldots, k_n k_n)$, $k \in Z^n$, $T = (T_1, T_2, \ldots, T_n) > 0$.

Această proprietate rezultă din formula (14'), datorită căreia putem scrie :

$$\tau_{T_K}(\omega_T f) = \tau_{T_K}(\sum_{k' \in Z^n} \tau_{T_{K'}} f) = \sum_{K' \in R^n} \tau_{T_{k'}}(\tau_{T_k} f) = \sum_{k'+k \in Z^n} \tau_{T_{k'+k}} f = \omega_T f.$$

Din proprietatea demonstrată, deducem că distribuția $\omega_T f$ este periodică în raport cu fiecare variabilă x_i și admite perioada T_i. În consecință, distribuția $\omega_T f$ este periodică în raport cu ansamblul variabilelor și admite perioada $T = (T_1, T_2, \ldots, T_n)$.

Astfel de exemplu, pentru $f = \delta_0 \in \mathscr{E}'(R^n)$ putem scrie :

$$(\omega_T \delta_0, \varphi) = (\delta_0, \omega_T \varphi) = \sum_{k \in Z^n} (\underline{\tau}_{T_k} \delta_0, \varphi)$$

de unde obținem relația :

$$\omega_T \delta_0 = \sum_{k \in Z^n} \underline{\tau}_{T_k} \delta_0 = \sum_{k \in Z^n} \tau_{T_k} \delta_0. \tag{15}$$

În particular, pentru $n = 1$ obținem :

$$\omega_T \delta_0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tau_{T_k} \delta_0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - kT), \quad k \in Z. \tag{16}$$

Ținînd seamă de (7) găsim :

$$\omega_T \delta_0 = \frac{1}{T} \sum_{k \in Z} e^{i \omega k x}. \tag{16'}$$

Analog, pentru $n = 2$ avem :

$$\omega_T \delta_0 = \sum_{k \in Z^2} \tau_{T_k} \delta_0 = \sum_{k_1, k_2 = -\infty}^{\infty} \delta(x - k_1 T_1, y - k_2 T_2), \quad T = (T_1, T_2) > 0.$$

În cele ce urmează, prin $\mathscr{P}'(R^n)$ vom nota mulțimea distribuțiilor periodice pe R^n. Structura distribuțiilor periodice este evidențiată de :

PROPOZIȚIA 5. *Orice distribuție periodică reprezintă transformata periodică a unei distribuții din* $\mathscr{E}'(R^n)$.

Demonstrație. Fie $\tilde{f} \in \mathscr{P}'(R^n)$ o distribuție periodică de perioadă T, iar U_T partiția periodică a unității corespunzătoare perioadei T. Deoarece $U_T \in K(R^n)$ și $\omega_T U_T = 1$, rezultă $U_T \tilde{f} \in \mathscr{E}'(R^n)$ și în consecință putem scrie :

$$\omega_T(U_T \tilde{f}) = \tilde{f}\,\omega_T U_T = \tilde{f}$$

deci propoziția este demonstrată.

În acest fel operatorul de transformare periodică ω_T aplică spațiul $\mathscr{E}'(R^n)$ pe $\mathscr{P}'(R^n)$, adică

$$\omega_T(\mathscr{E}'(R^n)) = \mathscr{P}'(R^n).$$

Proprietăți ale transformatei periodice a distribuțiilor.

PROPOZIȚIA 6. *Fie* $f \in \mathscr{E}'(R^n)$, *iar* D^α *operator de derivare. Atunci au loc formulele :*

$$D^\alpha(\omega_T f) = \omega_T(D^\alpha f) \tag{17}$$

$$(\omega_T f)^\vee = \omega_T(f^\vee). \tag{18}$$

Într-adevăr, $\forall_{\varphi \in K(R^n)}$ avem :

$$(D^\alpha(\omega_T f),\ \varphi) = (-1)^{|\alpha|}\,(\omega_T f,\ D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|}\,(f, \sum_{k \in Z^n} \tau_{T_k}(D^\alpha \varphi)).$$

Deoarece $D^\alpha f \in \mathscr{E}'(R^n)$, în baza formulei (19) din I.5., obținem :

$$(D^\alpha(\omega_T f),\ \varphi) = (-1)^{|\alpha|}\,(f,\ D^\alpha(\sum_{K \in Z^n} \tau_{T_k}\varphi)) = (D^\alpha f,\ \omega_T \varphi) = (\omega_T(D^\alpha f),\ \varphi),$$

de unde rezultă relația (17). În ce privește proprietatea simetriei dată de (18), aceasta se obține din relațiile :

$$((\omega_T f)^\vee, \varphi) = (\omega_T f,\ \varphi^\vee) = (f, \sum_{K \in Z^n} \tau_{T_k}\varphi^\vee) = (f, \sum_{k \in Z^n} (\tau_{T_k}\varphi)^\vee =$$

$$= (f^\vee, \sum_{k \in Z^n} \tau_{T_k}\varphi) = (f^\vee,\ \omega_T \varphi) = (\omega_T(f^\vee),\ \varphi).$$

Cu aceasta propoziția este demonstrată.

Scanned with OKEN Scanner

PROPOZIȚIA 7. *Fie* $f \in \mathscr{E}'(R^n)$ *iar* $\tilde{\psi} \in \mathscr{P}(R^n)$ *o funcție periodică de clasă* $C^\infty(R^n)$ *și de perioadă* T. *Atunci avem:*

$$\omega_T(\psi f) = \psi \omega_T f. \tag{19}$$

Demonstrație. În baza relației (14′) și formulei (16) din I.5., putem scrie:

$$\omega_T(\tilde{\psi} f) = \sum_{k \in Z^n} \tau_{T_k}(\tilde{\psi} f) = \sum_{k \in Z^n} (\tau_{T_k} \tilde{\psi})(\tau_{T_k} f) = \tilde{\psi} \omega_T f$$

deoarece $\omega_{T_k} \tilde{\psi} = \tilde{\psi}$.

Analog obținem:

PROPOZIȚIA 8. *Dacă* $\tilde{f} \in \mathscr{P}'(R^n)$ *are perioada* T *iar* $\psi \in K(R^n)$ *atunci*

$$\omega_T(\tilde{f} \psi) = \tilde{f} \omega_T \psi. \tag{20}$$

În ce privește transformata periodică a produsului de convoluție are loc proprietatea:

PROPOZIȚIA 9. *Fie* $f, g \in \mathscr{E}'(R^n)$. *Atunci avem:*

$$\omega_T(f * g) = \omega_T f * g = f * \omega_T g. \tag{21}$$

Demonstrație. Din ipoteză rezultă că $f * g \in \mathscr{E}'(R^n)$, deci $\omega_T(f * g)$ există și conform formulei (14′) și propoziției 10 din II.2.2., obținem:

$$\omega_T(f * g) = \sum_{k \in Z^n} \tau_{T_k}(f * g) = \sum_{k \in Z^n} \tau_{T_k} f * g = \omega_T f * g.$$

În baza proprietății de comutativitate a produsului de convoluție obținem formula (21).

Propoziția 5 conform căreia orice distribuție periodică este transformata periodică a unei distribuții cu suport compact, permite stabilirea unei relații de dualitate între distribuțiile periodice și funcțiile periodice indefinit derivabile.

Fie distribuțiile $f \in \mathscr{E}'(R^n)$, $\tilde{f} = \omega_T f \in \mathscr{P}'(R^n)$ și funcțiile $\varphi \in K(R^n)$, $\tilde{\varphi} = \omega_T \varphi \in \mathscr{P}(R^n)$.

De asemenea fie $U_T \in K(R^n)$, $\omega_T U_T = 1$ partiția periodică a unității din $K(R^n)$ corespunzătoare perioadei $T \in R^n$.

Deoarece $U_T \tilde{\varphi} \in K(R^n)$ și $\omega_T(U_T \tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi} \omega_T U_T = \tilde{\varphi}$, are loc relația:

$$(\tilde{f}, U_T \tilde{\varphi}) = (\omega_T f, U_T \tilde{\varphi}) = (f, \omega_T(U_T \tilde{\varphi})) = (f, \varphi). \tag{22}$$

Aceasta constituie relația funcțională dintre o distribuție cu suport compact și imaginea ei prin transformata periodică. Remarcăm că formula (22), poate fi considerată drept relație de definiție a distribuțiilor periodice.

Scanned with OKEN Scanner

4. Serii Fourier pentru distribuții

Fie $\tilde{f}: R^n \to \Gamma$ o funcție periodică, local integrabilă de perioadă $T^i = (0, 0, \ldots, 0, T_i, 0, \ldots, 0)$, $T_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ în raport cu variabila x_i, deci de perioadă $T = (T_1, \ldots, T_n) > 0$ în raport cu ansamblul variabilelor. Vom nota cu $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, $\omega_i = \dfrac{2\pi}{T_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ frecvența funcției periodice $\tilde{f}$ și fie $\omega_k = (\omega_1 k_1 x_1, \ldots, \omega_n k_n x_n)$, unde $k = (k_1, \ldots, k_n) \in Z^n$, $x \in R^n$.

DEFINIȚIA 1. Numim coeficienții Fourier ai funcției periodice, local integrabile $\tilde{f}: R^n \to \Gamma$, numerele:

$$C_k(\tilde{f}) = \frac{1}{T_1 T_2 \ldots T_n} \int_0^{T_1} \ldots \int_0^{T_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, e^{-i(\omega_k, x)} dx_1 \ldots dx_n,\ k \in Z^n, \tag{1}$$

unde $i = \sqrt{-1}$ iar $(\omega_k, x) = \omega_1 k_1 x_1 + \ldots + \omega_n k_n x_n$.

Seria Fourier asociată funcției periodice $\tilde{f}$ este:

$$\tilde{f} \sim \sum_{k \in Z^n} C_k(\tilde{f})\, e^{i(\omega_k, x)} \tag{2}$$

Această serie nu converge către funcția f. Dacă însă funcția periodică, local integrabilă pe domeniul $[0, T_1] \times \ldots \times [0, T_n]$ este cu variație mărginită, atunci seria Fourier converge către media aritmetică a limitelor laterale într-un punct x. Astfel, pentru $n = 1$ avem:

$$\sum_{k \in Z} C_k(\tilde{f})\, e^{i\omega k x} = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

În cazul cînd funcția periodică este continuă în punctul x, relația precedentă devine:

$$\sum_{k \in Z} C_k(f)\, e^{i\omega k x} = f(x). \tag{3}$$

Fie acum $\tilde{f} \in \mathscr{P}'(R^n)$ o distribuție periodică obținută conform propoziției 5 din III.3.3., prin transformarea periodică a distribuției cu suport compact $f \in \mathscr{E}'(R^n)$.

DEFINIȚIA 2. Coeficienții Fourier corespunzători distribuției $f \in \mathscr{P}'(R^n)$ sînt dați de expresiile:

$$C_k(\tilde{f}) = \frac{1}{T_1 T_2 \ldots T_n} (f, e^{-i(\omega_k, x)}),\ k \in Z^n, \tag{4}$$

unde $T = (T_1, \ldots, T_n)$, $T_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ reprezintă perioada distribuției $\tilde{f}$.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece funcția $\exp[-i(\omega_k, x)]$ este o funcție periodică ce admite perioada $T_k = (T_1 k_1, \ldots, T_n k_n)$, conform formulei (22) din III.3.3., formula (4) se poate scrie sub forma :

$$C_k(\tilde{f}) = \frac{1}{T_1 T_2 \ldots T_n} (\tilde{f}, U_T \, e^{-i(\omega_k, x)}), \tag{4'}$$

U_T fiind partiția periodică a unității din $K(R^n)$ corespunzătoare perioadei T. Formulele (4) și (4'), evident, constituie o generalizare a formulei (1) corespunzătoare funcțiilor periodice local integrabile.

Analog cu (2), seria Fourier corespunzătoare distribuției $\tilde{f} \in \mathscr{P}'(R^n)$, va fi $\sum_{k \in Z^n} C_k(\tilde{f}) \, e^{i(\omega_k, x)}$

Exemplul 1. Fie $\omega_T \delta_0 \in \mathscr{P}'(R)$ distribuția periodică corespunzătoare lui $\delta_0 \in \mathscr{E}'(R)$. Coeficienții Fourier corespunzători distribuției $\tilde{\delta}_0 = \omega_T \delta_0$, conform formulei (4), sînt :

$$C_k(\tilde{\delta}_0) = \frac{1}{T} (\delta_0, e^{-i\omega k x}) = \frac{1}{T}.$$

În consecință, seria Fourier asociată lui $\tilde{\delta}_0$ este : $\sum_{k \in Z} \frac{1}{T} e^{i\omega k x}$ și ținînd seamă de relația (16') din III.3.3., obținem :

$$\tilde{\delta}_0 = \omega_T \delta_0 = \frac{1}{T} \sum_{k \in Z} e^{i\omega k x} \tag{5}$$

deci seria Fourier asociată distribuției periodice $\tilde{\delta}_0$, converge în spațiul $K'(R)$ către această distribuție.

Vom arăta în general că seria Fourier asociată unei distribuții periodice din $\mathscr{P}'(R)$ converge întotdeauna în $K'(R)$ către distribuția periodică respectivă.

PROPOZIȚIA 1. *Fie distribuția periodică $\tilde{f} \in \mathscr{P}'(R)$ de perioadă T. Atunci seria Fourier asociată converge în $K'(R)$ către distribuția periodică corespunzătoare $\tilde{f}$, adică*

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k \in Z} C_k(\tilde{f}) \, e^{i\omega k x}, \; \omega = \frac{2\pi}{T}, \; T > 0.$$

Demonstrație. Notînd cu $U_T \in K(R)$, $\omega_T U_T = 1$, partiția periodică a unității, atunci $U_T \tilde{f} \in \mathscr{E}'(R)$ și în consecință, în baza formulei (5), obținem :

$$\tilde{\delta}_0 * U_T f = \frac{1}{T} \sum_{k \in Z} (U_T \tilde{f} * e^{i\omega k x}) \tag{6}$$

deoarece $U_T \tilde{f}$ avînd suport compact, produsele de convoluție există. Ținînd seamă că funcția $e^{i\omega k x} \in \mathscr{P}(R)$, deci este periodică, de perioadă

Scanned with OKEN Scanner

T și indefinit derivabilă, atunci conform propoziției 2 din II.2.3. putem scrie :

$$U_T\tilde{f} * e^{i\omega kx} = ((U_T\tilde{f})_t,\ e^{i\omega k(x-t)}) = e^{i\omega kx}(\tilde{f}_t,\ U_T(t)\ e^{-i\omega kt}) =$$

$$= e^{i\omega kx}(\omega_T f_t,\ U_T(t)\ e^{-i\omega kt}) = Te^{i\omega kx}\ C_k(\tilde{f})$$

deoarece $\omega_T(U_T(t)\ e^{-i\omega kt}) = e^{-i\omega kt}$.

Astfel relația (6) devine :

$$\omega_T \delta_0 * U_T\tilde{f} = \sum_{k\in Z} C_k(f)\ e^{i\omega kx}. \tag{7}$$

Conform propozițiilor 8 și 9 din III.3.3. putem scrie :

$$\omega_T\delta_0 * U_T\tilde{f} = \omega_T(\delta_0 * U_T\tilde{f}) = \omega_T(U_T\tilde{f}) = \tilde{f}$$

de unde rezultă relația :

$$\omega_T(f) = f = \sum_{k\in Z} C_k(\tilde{f})\ e^{i\omega kx} \tag{8}$$

cu care propoziția este demonstrată.

Remarcăm că formula (8) este valabilă și în R^n.

Exemplul 2. Să determinăm seria Fourier corespunzătoare distribuției $\delta_0' \in \mathscr{E}'(R)$. Conform relațiilor (16′) și (17) din III.3.3. putem scrie :

$$\tilde{\delta}_0' = \omega_T(\delta_0') = \frac{d}{dx}(\omega_T\delta_0) = \sum_{k\in Z}\delta_{kT}' = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{T}\sum_{k\in Z} e^{i\omega kx}\right] = \frac{2\pi i}{T^2}\sum_{k\in Z} k\ e^{i\omega kx}$$

deci

$$\tilde{\delta}_0' = \frac{2\pi i}{T^2}\sum_{k\in Z} k\ e^{i\omega kx}. \tag{9}$$

PROPOZIȚIA 2. *Fie* $f, g \in \mathscr{E}'(R^n)$ *și* $\tilde{f} = \omega_T f$, $\tilde{g} = \omega_T g$, $T = (T_1, \ldots, T_n) > 0$. *Atunci are loc relația :*

$$C_k(\widetilde{f * g}) = C_k[\omega_T(f * g)] = T_1T_2 \ldots T_nC_k\ (\tilde{f})\ C_k(\tilde{g}) \tag{10}$$

Într-adevăr, deoarece $f * g \in \mathscr{E}'(R^n)$ avem :

$$C_k(\widetilde{f * g}) = \frac{1}{T_1T_2 \ldots T_n}(f*g,\ e^{-i(\omega_k, x)}) = \frac{1}{T_1T_2 \ldots T_n}(f_x \times g_y,\ e^{-i(\omega_k, x+y)}) =$$

$$= \frac{1}{T_1T_2 \ldots T_n}(f_x, (g_y,\ e^{-i(\omega_k, x)} \cdot e^{-i(\omega_k, y)})) =$$

$$= \frac{1}{T_1T_2 \ldots T_n}(f_x, e^{-i(\omega_k, x)})\ (g_y, e^{-i(\omega_k, y)}) = T_1T_2 \ldots T_nC_k(\tilde{f})C_k(\tilde{y}).$$

Scanned with OKEN Scanner

În particular, pentru $n = 1$, obținem $C_k(\widetilde{f * g}) = TC_k(\tilde{f})C_k(\tilde{g})$ și în consecință seria Fourier corespunzătoare distribuției $f * g$ va fi :

$$\widetilde{f * g} = \omega_T(f * g = \sum_{k \in Z} TC_k(\tilde{f})\, C_k(\tilde{g}),\ \omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{11}$$

PROPOZIȚIA 3. *Fie distribuțiile cu suport compact* $f_x \in \mathscr{E}'(R^n)$, $g_y \in \mathscr{E}'(R^m)$ *și* $\tilde{f}_x = \omega_{T_x} f$, $\tilde{g}_y = \omega_{T_y} g$ *distribuțiile periodice corespunzătoare de perioade* $T_x \in R^n$ *și* $T_y \in R^m$. *Atunci avem :*

$$C_k(\widetilde{f_x \times g_y}) = C_k[\omega_T(f_x \times g_y)] = C_{k_x}(f_x)\, C_{k_y}(\tilde{g}_x), \tag{12}$$

unde $k \in Z^{n+m}$, $k_x \in Z^n$, $k_y \in Z^m$, $T = (T_x, T_y) \in R^{n+m}$.

Demonstrație. Deoarece $f_x \times g_y \in \mathscr{E}'(R^{n+m})$, în baza propoziției 8 din II.2.1., putem scrie :

$$\tau_{(T_x, T_y)}(f_x \times g_y) = \tau_{T_x} f_x \times \tau_{T_y} g_y = f_x \times g_y.$$

Deci distribuția $f_x \times g_y \in \mathscr{E}'(R^{n+m})$ este periodică de perioadă $T = (T_x,\ T_y)$ fapt pentru care avem :

$$C_k(\widetilde{f_x \times g_y}) = \frac{1}{T_1 \ldots T_n T'_1 \ldots T'_m}(f_x \times g_y,\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_k, z)}),$$

unde $z = (x,\ y) \in R^{n+m}$, $\omega_k = (\omega_1 k_1 x_1, \ldots, \omega_n k_n x_n, \omega'_1 k'_1 y_1, \ldots, \omega'_m k'_m y_m)$ $\omega_i = \frac{2\pi}{T_i}\ (i = 1, 2, \ldots, n)$, $\omega'_j = \frac{2\pi}{T'_j}\ (j = 1, 2, \ldots, m)$, $k = (k_1, k_n, k'_1, \ldots, k'_m) \in$ $\in Z^{n+m}$, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n,\ \omega'_1, \ldots, \omega'_m) \in R^{n+m}$, $T_x = (T_1, \ldots, T_n) > 0$, $T_y =$ $= (T'_1,\ T'_2, \ldots, T'_m) > 0$.

În consecință, obținem :

$$C_k(\widetilde{f_x \times g_y}) = \frac{1}{(T_1 \ldots T_n)(T'_1 \ldots T'_m)}(f_x,\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{k_x}, x)})\ (g_y,\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{k_y}, y)}) =$$

$$= C_{k_x}(\tilde{f}_x)\, C_{k_y}(\tilde{g}_y),$$

unde s-a notat : $k_x = (k_1,\ k_2, \ldots,\ k_n) \in Z^n$, $k_y = (k'_1, \ldots,\ k'_m) \in Z^m$ $\omega_{k_x} = (\omega_1 k_1, \ldots,\ \omega_n k_n) \in R^n$, $\omega_{k_y} = (\omega'_1 k'_1, \ldots, \omega'_m k'_m) \in R^m$.

Observație. Deoarece distribuțiile f_x și f_y admit perioadele T_x, T_y, ele admit și perioadele T_{k_x} și T_{k_y}, unde

$$T_{k_x} = (T_1 k_1, \ldots, T_n k_n) \in R^n,\ T_{k_y} = (T'_1 k'_1, \ldots, T'_m k'_m) \in R^m.$$

Scanned with OKEN Scanner

Putem scrie :

$$\omega_T(f_x \times g_y) = \widetilde{f_x \times g_y} = \sum_{k_x \in Z^n} \sum_{k_y \in Z^m} \tau_{(Tk_x,\ Tk_y)}(f_x \times g_y) =$$

$$= \sum_{k_x \in Z^n} \sum_{k_y \in Z^m} (\tau_{Tk_x} f_x) \times (\tau_{Tk_y} g_y) = (\omega_{T_x} f_x) \times (\omega_{T_y} g_y)$$

adică am obținut formula :

$$\omega_T(f_x \times g_y) = \omega_{(T_x,\ T_y)}(f_x \times g_y) = \omega_{T_x} f_x \times \omega_{T_y} g_y. \tag{13}$$

În baza formulei (12) seria Fourier corespunzătoare distribuției $\widetilde{f_x \times g_y} = \omega_T(f_x \times g_y)$ va avea expresia :

$$\sum_{k_x \in Z^n} \sum_{k_y \in Z^m} C_{k_x}(\tilde{f}_x)\ C_{k_y}(\tilde{g}_y)\ e^{i[(\omega_{k_x},\ x)+(\omega_{k_y},\ y)]}. \tag{14}$$

Deoarece

$$\omega_{T_x} f_x = \sum_{k_x \in Z^n} C_{k_x}(\tilde{f}_x)\ e^{i(\omega_{k_x},\ x)}$$

$$\omega_{T_y} g_y = \sum_{k_y \in Z^m} C_{k_y}(\tilde{g}_y)\ e^{i(\omega_{[k_y},\ y)}$$

ținînd seamă de formula (13), obținem relația :

$$\omega_T(f_x \times g_y) = \omega_{T_x} f_x \times \omega_{T_y} g_y =$$

$$= \sum_{k_x \in Z^n} \sum_{k_y \in Z^m} C_{k_x}(\tilde{f}_x)\ C_{k_y}(\tilde{g}_y)\ e^{i[(\omega_{k_x},\ x)+(\omega_{k_y},\ y)]}.$$

Exemplul 3. Fie δ_x, δ_y, $\delta_{(x,\ y)}$ distribuțiile lui Dirac concentrate în origine, respectiv pe R și R^2. Să determinăm seria Fourier corespunzătoare distribuției periodice $\tilde{\delta}_{(x,\ y)} = \omega_T \delta_{(x,\ y)}$. Deoarece $\delta_{(x,\ y)} = \delta_x \times \delta_y$ și $\omega_{T_1}\ \delta_x$, $\omega_{T_2}\ \delta_y$ au expresiile :

$$\omega_{T_1} \delta_x = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \delta(x - k_1 T_1),\quad \omega_{T_2} \delta_y = \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \delta(y - k_2 T_2),\ \text{obținem :}$$

$$\omega_T\ \delta_{(x,\ y)} = \omega_{T_1} \delta_x \times \omega_{T_2} \delta_y = \sum_{k_1, k_2=-\infty}^{\infty} \delta(x - k_1 T_1,\ y - k_2 T_2),$$

$$T = (T_1,\ T_2) > 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Coeficienţii seriei Fourier sînt :

$$C_k(\widetilde{\delta_{(x,\,y)}}) = \frac{1}{T_1 T_2}\,(\delta_{(x,\,y)},\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_1 k_1 x + \omega_2 k_2 y)}) = \frac{1}{T_1 T_2}$$

unde $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T_1}$, $\omega_2 = \dfrac{2\pi}{T_2}$.

În consecinţă, seria Fourier corespunzătoare distribuţiei $\tilde{\delta}_{(x,\,y)}$ va avea expresia :

$$\omega_T \delta_{(x,\,y)} = \sum_{k_1,\,k_2=-\infty}^{\infty} \delta_{k_1 T_1} \times \delta_{k_2 T_2} = \frac{1}{T_1 T_2} \sum_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\left(\frac{k_1 x}{T_1} + \frac{k_2 y}{T_2}\right)}. \qquad (15)$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 4

Ecuații de convoluție

§ 1. Algebre și ecuații de convoluție. Proprietăți generale

În II.1.1. s-a definit noțiunea de algebră și s-a arătat că spațiul $L^1(R^n)$, în raport cu produsul de convoluție, formează o algebră Banach comutativă, fără element unitate, numită încă algebră de convoluție.

O importanță deosebită o prezintă algebrele de convoluție în spațiul distribuțiilor deoarece ele permit studiul general al existenței și aproximării soluțiilor pentru o largă clasă de ecuații ca de exemplu, ecuațiile diferențiale liniare cu coeficienți constanți, ecuațiile integro-diferențiale, ecuațiile cu diferențe finite și altele. Astfel algebra de convoluție K'_+ stă la baza calculului operațional de o variabilă, care are largi aplicații în problemele de fizică-matematică.

Rezultate fundamentale legate de ecuațiile de convoluție se datoresc lui L. Schwartz [86], L. Ehrenpreis [24], [25], B. Malgrange [65], J. L. Lions [61], [62], L. Hörmander [40], I. M. Gelfand, G. E. Silov [32], [33].

DEFINIȚIA 1. Spunem că subspațiul vectorial $\mathscr{K}' \subset K'(R^n)$ formează o algebră de convoluție dacă satisface următoarele condițiuni:

i) $\underset{f,\,g\in\mathscr{K}'(R^n)}{\forall}\ \underset{f*g}{\exists}$ și $f * g \in \mathscr{K}'(R^n)$

ii) $\underset{f,\,g,\,h\in\mathscr{K}'(R^n)}{\forall}\ (f * g) * h = f * (g * h).$

Remarcăm că existența produsului de convoluție implică comutativitatea lui și în consecință conform definiției 2 din II.1.1., dată algebrei, subspațiul $\mathscr{K}' \subset K'$ formează o algebră comutativă. Dacă distribuția lui Dirac $\delta_0 \in \mathscr{K}'(R^n)$, atunci ea reprezintă elementul unitate al algebrei $\mathscr{K}'$ și în acest caz este o algebră de convoluție cu unitate. Astfel spațiul $\mathscr{E}'(R^n)$ al distribuțiilor cu suport compact formează o algebră de convoluție cu unitate. În calculul simbolic prezintă un interes deosebit spațiul K'_+ al distribuțiilor din $K'(R)$, avînd suporturile în $[0, \infty)$. Se verifică ușor că spațiul K'_+ constituie o algebră de convoluție cu unitate. Spre deosebire de acestea, spațiile $L^1(R^n)$, $K(R^n)$, $S(R^n)$ formează algebre de convoluție fără unitate. Spațiul distribuțiilor $K'(R^n)$ nu formează o algebră de convoluție deoarece produsul de convoluție nu există pentru orice pereche de distribuții.

DEFINIȚIA 2. Fie subspațiul vectorial $X' \subset K'(R^n)$ și $\mathscr{K}'(R^n)$ o algebră de convoluție cu unitate astfel încît $\mathscr{K}' \subset X'$.

Scanned with OKEN Scanner

Spunem că X' este un modul de convoluție pe algebra $\mathscr{K}'$ dacă sînt îndeplinite următoarele condiții:

$$i_1) \quad \underset{\substack{f\in\mathscr{K}'\\ X\in X'}}{\forall} \quad \exists \; f*X \quad \text{și} \quad f*X \subset X'$$

$$i_2) \quad \underset{\substack{f_1,f_2\in\mathscr{K}'\\ X\in X'}}{\forall} \quad f_1*(f_2*X)=(f_1*f_2)*X$$

$$i_3) \quad \underset{\substack{f_1,f_2\in\mathscr{K}'\\ X_1,X_2\in X'}}{\forall} \quad (f_1+f_2)*X_1=f_1*X_1+f_2*X_1$$

$$f_1*(X_1+X_2)=f_1*X_1+f_1*X_2.$$

Algebra de convoluție $\mathscr{K}'$ în raport cu modulul X' se numește algebră de operatori pe X'. Observăm de asemenea că în raport cu operațiile „$+$" și „$*$" algebra $\mathscr{K}'$ are o structură de inel comutativ.

Din definția modulului de convoluție, rezultă că orice algebră de convoluție cu unitate este un modul de convoluție pe sine însăși. Spațiul distribuțiilor $K'(R^n)\supset\mathscr{E}'(R^n)$ reprezintă un modul de convoluție pe algebra de convoluție cu unitate $\mathscr{E}'(R^n)$. Spre deosebire de acesta, spațiul $K'(R)\supset K'_+$ nu este un modul de convoluție pe K'_+ deoarece condiția i_1) nu este întotdeauna îndeplinită.

Fie $\mathscr{K}'(R^n)$ o algebră de convoluție cu unitate. Să notăm cu $(\mathscr{K}')^{m\times m}$ mulțimea matricelor patrate de ordin $m\geqslant 1$ ale căror elemente sînt distribuții din algebra cu unitate $\mathscr{K}'$. Astfel dacă (a) $\in(\mathscr{K}')^{m\times m}$, atunci elementele sale $a_{ij}\in\mathscr{K}'(R^n)$, $(i,j=1,2,\ldots,m)$. Ținînd seama că mulțimea matricelor patrate în raport cu adunarea și înmulțirea cu scalari are o structură de spațiu vectorial, vom defini produsul de convoluție în spațiul $(\mathscr{K}')^{m\times m}$ prin formula:

$$\underset{(a),\,(b)\in(\mathscr{K}')^{m\times m}}{\forall} \quad (a)*(b)=(c) \quad \text{unde}$$

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{m} a_{ik}*b_{kj} \qquad (i,j=1,2,\ldots,m) \tag{1}$$

iar $(a)=(a_{ij})$, $(b)=(b_{ij})$.

Elementul unitate în $(\mathscr{K}')^{m\times m}$ în raport cu produsul de convoluție este matricea $(\delta)\in(\mathscr{K}')^{m\times m}$ definită prin relația:

$$(\delta)=\begin{cases}\delta_0, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}(i,j=1,2,\ldots,m) \tag{2}$$

unde $\delta_0\in\mathscr{K}'(R^n)$ reprezintă distribuția lui Dirac.

Deoarece produsul matricelor este asociativ dar în general necomutativ, deducem că spațiul $(\mathscr{K}')^{m\times m}$ este o algebră necomutativă cu element unitate. Evident spațiul $(\mathscr{K}')^{m\times m}$ în raport cu operațiile „$+$" și „$*$" are o structură de inel necomutativ. Uneori vom spune că spațiul $(\mathscr{K}')^{m\times m}$ astfel structurat formează un inel de convoluție.

Scanned with OKEN Scanner

În ce privește determinantul det(a) asociat matricei $(a) \in (\mathscr{K}')^{m\times m}$, acesta se determină considerînd produsele ce intervin la calculul acestuia, produse de convoluție.

În consecință $\det(a) \in \mathscr{K}'(R^n)$.

Fie X' un modul de convoluție pe algebra $\mathscr{K}'(R^n)$. Vom nota cu $(X')^m$ mulțimea matricelor coloană de m elemente din X'. Dacă $f \in \mathscr{K}'(R^n)$ și $(X) \in (X')^m$ atunci matricea coloană $f * (X) \in (X')^m$ se definește prin formula:

$$f * (X) = \begin{pmatrix} f * X_1 \\ f * X_2 \\ \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \\ f * X_m \end{pmatrix} \tag{3}$$

unde

$$(X) = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix}, \quad X_i \in X', \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Analog, dacă $(a) \in (\mathscr{K}')^{m\times m}$ și $(X) \in (X')^m$, atunci matricea $(a) * (X) \in (X')^m$, prin definiție, are expresia:

$$(a) * (X) = (Y), \; Y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} * X_j, \; i = 1, 2, \ldots, m \tag{4}$$

unde $(a) = (a_{ij})$.

În acest fel, datorită formulelor (3) și (4) spațiul vectorial $(X')^m$ poate fi considerat drept modul pe inelele de convoluție $\mathscr{K}'$ și $(\mathscr{K}')^{m\times m}$.

De asemenea $(X')^{m\times m}$ se poate considera modul pe $\mathscr{K}'$ și $(\mathscr{K}')^{m\times m}$, în consecință $(\mathscr{K}')^{m\times m} * (X')^{m\times m} \in (X')^{m\times m}$.

Definiția 3. Fie $\mathscr{K}'$ o algebră de convoluție cu unitate și X' un modul de convoluție pe $\mathscr{K}'$. Numim ecuație de convoluție o ecuație de forma:

$$A * X = B, \tag{5}$$

unde $A \in \mathscr{K}'(R^n)$ și $B \in X'(R^n)$ sînt distribuții date, iar $X \in X'(R^n)$ reprezintă distribuția necunoscută.

Analog, ecuația:

$$(a) * (X) = (b), \tag{6}$$

unde $(a) \in (\mathscr{K}')^{m\times m}$, $(b) \in (X')^m$ și $(X) \in (X')^m$ reprezintă matricea necunoscută, este o ecuație matricială de convoluție. Ecuația matricială (6) este echivalentă cu un sistem de m ecuații de convoluție cu m distribuții necunoscute X_j, anume:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} * X_j = b_i, \quad (i = 1, 2 \ldots, m), \tag{7}$$

unde $a_{ij} \in \mathscr{K}'(R^n)$, b_i, $X_j \in X'(R^n)$.

Scanned with OKEN Scanner

Matricea $(a)=(a_{ij})$ reprezintă matricea coeficienților sistemului, iar (b) matricea corespunzătoare membrului drept al sistemului (7). În particular, dacă $(b)=(0)$, atunci ecuațiile (6) respectiv (7), se numesc omogene.

DEFINIȚIA 4. Numim soluție fundamentală (elementară) corespunzătoare ecuației matriciale (6), matricea $(E)\in(X')^{m\times m}$, satisfăcînd relația:

$$(a)*(E)=(E)*(a)=(\delta) \tag{8}$$

unde $(\delta)\in(\mathscr{K}')^{m\times m}$ reprezintă elementul unitate în inelul de convoluție $(\mathscr{K}')^{m\times m}$.

DEFINIȚIA 5. Spunem că matricea $(a)\in(\mathscr{K}')^{m\times m}$ este inversibilă în $(\mathscr{K}')^{m\times m}$ dacă există o matrice

$$(a)^{-1}\in(\mathscr{K}')^{m\times m} \qquad \text{astfel încît}$$

$$(a)*(a)^{-1}=(a)^{-1}*(a)=(\delta).$$

Matricea $(a)^{-1}$ se numește inversa matricei (a) în $(\mathscr{K}')^{m\times m}$. De aici rezultă că orice inversă a matricei $(a)\in(\mathscr{K}')^{m\times m}$ reprezintă o soluție fundamentală a ecuației (6). Reciproca, în general, nu este adevărată.

Dacă $X'=\mathscr{K}'$ și soluția fundamentală există, atunci evident aceasta coincide cu inversa elementului $(a)\in(\mathscr{K}')^{m\times m}$, deci $E=(a)^{-1}$.

PROPOZIȚIA 1. *Dacă $(E)\in(X')^{m\times m}$ este o soluție fundamentală a ecuației (6) și $(X_i)\in(X')^m$ $(i=1,2,\ldots,m)$ sînt soluții ale ecuației omogene corespunzătoare, atunci este soluție fundamentală a aceleași ecuații și matricea $(\tilde{E})\in(X')^{m\times m}$, avînd expresia:*

$$(\tilde{E})=(E)+(Y)$$

unde

$$(Y)=\begin{pmatrix} X_{11}\ldots X_{1m}\\ X_{21}\ldots X_{2m}\\ \vdots\quad\ \vdots\\ X_{m1}\ldots X_{mm}\end{pmatrix}\in(X')^{m\times m},\quad (X_i)=\begin{pmatrix} X_{1i}\\ X_{2i}\\ \vdots\\ X_{mi}\end{pmatrix}\in(X')^m,$$

$$i=1,2,\ldots,m.$$

Demonstrație. Deoarece $(a)*(X_i)=(0)$ $(i=1,2,\ldots,m)$, rezultă $(a)*(Y)=(0)$. În consecință, putem scrie:

$$(a)*(\tilde{E})=(a)*[(E)+(Y)]=(a)*(E)+(a)*(Y)=(\delta)$$

și cu aceasta propoziția este demonstrată.

PROPOZIȚIA 2. *Fie $(E)\in(X')^{m\times m}$ soluția fundamentală a ecuației (6) și $(X_1)\in(X')^m$ o soluție a ecuației omogene asociate. Atunci orice soluție $(X)\in(X')^m$ a ecuației (6) cu $(b)\in(\mathscr{K}')^m$ are expresia:*

$$(X)=(E)*(b)+(X_1).$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Deoarece $(a) * (X_1) = (0)$ și $(E) * (b)$ există, obținem :

$$(a) * (X) = [(a) * (E)] * (b) + (a) * (X_1) = (\delta) * (b) = (b),$$

deci (X) este soluție a ecuației (6). Reciproc, dacă (X) este soluție a ecuației (6), atunci considerînd $(X) = (E) * (b) + (Z)$, unde $(Z) \in (X')^m$ este o matrice necunoscută, obținem : $(a) * (Z) = (0)$, deci (Z) este o soluție a ecuației omogene corespunzătoare ecuației (6).

În particular, pentru ecuația (5) $(m=1)$, dacă soluția fundamentală $E \in X'$ există, atunci ea satisface relația :

$$A * E = E * A = \delta_0, \quad \delta_0 \in \mathscr{K}'(R^n)$$
$$A \in K(R^n).$$

PROPOZIȚIA 3. *Dacă* $A \in K(R^n)$ *atunci ecuația* (5) *nu are soluție fundamentală.*

Într-adevăr, dacă ar exista o soluție fundamentală $E \in K'(R^n)$ atunci conform propoziției 2 din II.2.3., funcția $A * E$ ar fi indefinit derivabilă și în consecință nu poate fi egală cu δ_0.

PROPOZIȚIA 4. *Condiția necesară și suficientă pentru ca ecuația :*

$$(a) * (X) = (b); \quad (a) \in (\mathscr{K}')^{m \times m}, \ (X), \ (b) \in (\mathscr{K}')^m \tag{9}$$

să admită o soluție, oricare ar fi (b), *este ca determinantul matricei* (a) *să fie inversibil în* $\mathscr{K}'(R^n)$. *Atunci soluția fundamentală există, este unică și are expresia :*

$$(E) = (a)^{-1} \tag{10}$$

unde $(a)^{-1}$ *este matricea inversă matricei* (a). *Soluția ecuației* (9) *de asemenea este unică și este dată de expresia :*

$$(X) = (E) * (b) = (a)^{-1} * (b). \tag{11}$$

Demonstrație. Pentru a arăta necesitatea condiției, să presupunem că ecuația (9) admite o soluție pentru orice (b). Atunci în particular, considerînd succesiv pentru (b) respectiv :

$$(b_1) = \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (b_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ (b_m) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta \end{pmatrix}$$

obținem soluțiile corespunzătoare :

$$(X_1) = \begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{21} \\ \vdots \\ X_{m1} \end{pmatrix}, \ \ldots, \ (X_m) = \begin{pmatrix} X_{1m} \\ X_{2m} \\ \vdots \\ X_{mm} \end{pmatrix} \in (\mathscr{K}')^m$$

Scanned with OKEN Scanner

care verifică ecuațiile :

$$(a) * (X_i) = (b_i), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{12}$$

În baza acestor ecuații rezultă că matricea :

$$(C) = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \ldots X_{1m} \\ X_{21} & X_{22} \ldots X_{2m} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ X_{m1} & X_{m2} \ldots X_{mm} \end{pmatrix} \in (\mathscr{K}')^{m \times m}$$

satisface relația :

$$(a) * (C) = (\delta).$$

În consecință avem :

$$\det(a) * \det(C) = \det(\delta) = \delta_0, \quad \delta_0 \in \mathscr{K}'(R^n)$$

deci $\det(a)$ este inversibil în $\mathscr{K}'(R^n)$ și cu aceasta necesitatea condiției este dovedită. Pentru a arăta suficiența condiției vom presupune că $\det(a)$ este inversivil în $\mathscr{K}'(R^n)$. Considerăm matricea $(E) \in (\mathscr{K}')^{m \times m}$ ale cărei elemente $E_{ij} \in \mathscr{K}'(R^n)$ au expresiile :

$$E_{ij} = [\det(a)]^{-1} * \alpha_{ji} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m) \tag{13}$$

unde α_{ji} reprezintă complementul algebric al elementului a_{ij} din $\det(a)$. Efectuînd produsele $(a) * (E)$, $(E) * (a)$ obținem :

$$(a) * (E) = (E) * (a) = (\delta).$$

Deci matricea (E) astfel construită este soluția fundamentală a ecuației (9) și evident reprezintă inversa matricei (a) în $(\mathscr{K}')^{m \times m}$ adică $(E) = (a)^{-1}$.

În aceste condițiuni matricea $(X) = (E) * (b)$ există pentru orice (b) și reprezintă o soluție a ecuației (9) deoarece avem : $(a) * (X) = [(a) * (E)] * (b) = (\delta) * (b) = (b)$. Cu aceasta suficiența condiției este demonstrată. Unicitatea soluției dată de (11) rezultă din echivalența ecuațiilor (9) și (11), deoarece înmulțind la stînga expresia (11) cu (a) obținem ecuația (9). Pentru a arăta unicitatea soluției fundamentale (E) să admitem că ar exista și o alta anume (E'). Atunci deoarece

$$(E') * (a) = (\delta)$$

obținem :

$$(E') * (a) * (E) = (E)$$

dar cum $(a) * (E) = (\delta)$ avem $(E') = (E)$ și cu aceasta propoziția este complet demonstrată.

Exemplu: Fie ecuația lui Poisson :

$$\Delta\delta_0 * X = B, \tag{14}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde Δ reprezintă operatorul lui Laplace în R^3 și δ_0 distribuția lui Dirac. Deoarece $\Delta\delta_0 \in \mathscr{E}'(R^n)$ vom căuta soluțiile ecuației de convoluție (14) în $K'(R^3)$, care este un modul de convoluție pe algebra de convoluție cu unitate $\mathscr{E}'(R^3)$. În baza exemplului 2 din I.5., deducem că distribuția de tip funcție $E = -\dfrac{1}{4\pi r} \in K'(R^3)$, unde $r = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ este o soluție fundamentală a ecuației (14) deoarece $\Delta\dfrac{1}{r} = -4\pi\delta_0$, deci $\Delta\delta_0 * E = \delta_0$.

Notînd cu Y o distribuție armonică, atunci $\Delta Y = 0$ și conform propoziției 1 distribuția $\tilde{E} = E + Y$ va fi tot o soluție fundamentală a ecuației (14).

Pentru a construi soluția generală a ecuației (14) cu ajutorul soluției fundamentale E observăm că suportul distribuției E este întreg spațiul R^3. În consecință, considerînd $B \in \mathscr{E}'(R^3)$, conform propoziției 2 vom obține pentru soluția generală a ecuației (14) expresia:

$$X = -\frac{1}{4\pi r} * B + Y. \tag{15}$$

Menționăm că soluția fundamentală E nu reprezintă inversul elementului $\Delta\delta_0 \in \mathscr{E}'(R^n)$ în $\mathscr{E}'(R^3)$ deoarece $E \notin \mathscr{E}'(R^3)$.

În concluzie, expresia (15) reprezintă soluția generală a ecuației lui Poisson $\Delta X = B$ adică (14).

§ 2. Ecuații de convoluție în K'_+

1. Algebra de convoluție K'_+

In II.1.3. s-a arătat că mulțimea $C(R_+)$ a funcțiilor complexe definite și continue pe $R_+ = [0, \infty)$, înzestrate cu produsul de convoluție „$\circledast$" formează o algebră comutativă, fără element unitate, numită algebră de convoluție $C(R_+)$. În baza teoremei lui Titchmarsch rezultă că algebra $C(R_+)$ nu are divizori ai lui zero. O generalizare a algebrei de convoluție $C(R_+)$ o constituie algebra de convoluție K'_+. Vom arăta că algebra de convoluție K'_+ ca și algebra $C(R_+)$ nu are divizori ai lui zero.

Propoziția 1. *Algebra de convoluție K'_+ nu are divizori ai lui zero, deci dacă $f, g \in K'_+$ și $f * g = 0$, atunci $f = 0$ sau $g = 0$.*

Demonstrație. Fie funcțiile neidentic nule $\alpha, \beta \in C^\infty(R)$ cu $\operatorname{supp}(\alpha, \beta) \subset R_+$. Atunci $\alpha * \beta$, $(f * g) * (\alpha * \beta)$ există și deoarece $\alpha * \beta \neq 0$ și $f * g = 0$, obținem $(f * \alpha) * (g * \beta) = 0$. Dar conform propoziției 2 din II.2.3., rezultă că $f * \alpha$, $g * \beta$ sînt funcții continue și cum suporturile lor sînt în R_+, pe baza teoremei lui Titchmarsch rezultă $f * \alpha = 0$ sau $g * \beta = 0$. Astfel, dacă $f * \alpha = 0$, atunci $\underset{\varphi \in K(R)}{\forall}$ $\operatorname{supp} \varphi \subset R_+$ avem:

$$(f * \alpha) * \varphi = (f * \varphi) * \alpha = 0.$$

Deoarece funcțiile $f * \varphi$ și α au suporturile în R_+ și α nu este identic nulă, pe baza teoremei lui Titchmarsch rezultă $f * \varphi = 0$, $\underset{\varphi \in K(R)}{\forall}$ $\operatorname{supp} \varphi \subset R_+$.

Scanned with OKEN Scanner

În virtutea propoziției 4 din II.2.3. deducem $f=0$ și cu aceasta propoziția este demonstrată.

Fie ecuația de convoluție în K'_+ :

$$A * X = B \tag{1}$$

unde $A, B, X \in K'_+$.

PROPOZIȚIA 2. *Dacă $A \in K'_+$ este inversibilă în K'_+, atunci inversa ei $A^{-1} \in K'_+$ este unică, reprezintă soluția fundamentală a ecuației* (1) *și ecuația* (1) *are o singură soluție a cărei expresie este:*

$$X = A^{-1} * B. \tag{2}$$

Demonstrație. Evident că orice invers al elementului $A \in K'_+$, dacă există, este o soluție fundamentală a ecuației (1). Presupunînd că ecuația (1) are două soluții fundamentale E și E', atunci din relațiile :

$$A * E = \delta, \quad A * E' = \delta$$

rezultă $A * (E - E') = 0$ și cum $A \neq 0$, iar algebra K'_+ nu are divizori ai lui zero, deducem $E = E'$. Cu aceasta unicitatea inversei soluției fundamentale este dovedită.

Înmulțind ecuația (1) cu $E = A^{-1}$ vom obține relația (2) ceea ce atestă unicitatea soluției ecuației (1).

PROPOZIȚIA 3. *Fie $A, B \in K'_+$. Dacă A și B sînt inversibile în K'_+ atunci $A * B$ este inversibilă în K'_+ și avem:*

$$(A * B)^{-1} = A^{-1} * B^{-1}. \tag{3}$$

Într-adevăr, deoarece $A * A^{-1} = \delta$, $B * B^{-1} = \delta$, avem :

$$(A * B) * (A^{-1} * B^{-1}) = (A * A^{-1}) * (B * B^{-1}) = \delta * \delta = \delta,$$

adică $(A * B)^{-1} = A^{-1} * B^{-1}$.

Observație. Dacă $A, B \in (K'_+)^{m \times m}$ și A, B sînt inversibile în $(K'_+)^{m \times m}$, atunci $A * B \in (K'_+)^{m \times m}$ este inversibilă în $(K'_+)^{m \times m}$ și avem :

$$(A * B)^{-1} = B^{-1} * A^{-1} \tag{3'}$$

Într-adevăr, avem :

$$(A * B) * (B^{-1} * A^{-1}) = A * (B * B^{-1}) * A^{-1} = A * (\delta) * A^{-1} = A * A^{-1} = (\delta)$$

aceasta deoarece : $A * A^{-1} = A^{-1} * A = (\delta)$

$$B * B^{-1} = B^{-1} * B = (\delta).$$

Subliniem că inelul de convoluție $(K'_+)^{n \times n}$ este necomutativ. Pentru rezolvarea ecuațiilor de convoluție în algebra K'_+ este utilă aplicarea trans-

Scanned with OKEN Scanner

formatei Laplace. Astfel dacă distribuţiile A, B, X ce figurează în ecuaţia (1) admit transformată Laplace, atunci datorită proprietăţii (15) din III.2.1. obţinem :

$$L[X] = \frac{L[B]}{L[A]} = L(p), \quad p = \sigma + i\tau. \tag{4}$$

În cazul că $L(p)$ admite un original care aparţine algebrei K'_+, atunci acesta reprezintă soluţia căutată.

Exemplu. Fie ecuaţia de convoluţie în K'_+ :

$$(\theta(x)\cos x - \delta'(x)) * X = B. \tag{5}$$

Deoarece elementul $A = \theta(x)\cos x - \delta'(x) \in K'_+$ admite transformată Laplace, inversul său $E = A^{-1}$ satisface ecuaţia $A * E = \delta$ şi în consecinţă obţinem :

$$L[E] = \frac{1}{L[A]} = -\frac{1}{p} - \frac{1}{p^3}.$$

Ţinînd seamă că $\frac{d^2}{dp^2} L[\theta] = L[x^2\,\theta] = \frac{2}{p^3}$, prin aplicarea transformatei Laplace inversă, găsim pentru soluţia fundamentală $E = A^{-1}$ expresia :

$$E = -\theta - \frac{x_+^2}{2}, \quad \text{unde} \quad x_+^2 = x\theta. \tag{6}$$

Cu aceasta soluţia unică a ecuaţiei (5) pentru orice $B \in K'_+$ va fi :

$$X = E * B = -\theta * B - \frac{1}{2} x_+^2 * B. \tag{7}$$

În particular, pentru $B = \theta x \sin x \in K'_+$, obţinem soluţia :

$$X = -2x\theta + 2\theta \sin x \tag{8}$$

deoarece avem :

$$\theta * \theta x \sin x = \theta \int_0^x (x - t) \sin (x - t)\, dt = \theta \sin x - \theta \cos x$$

$$x_+^2 * \theta x \sin x = \theta \int_0^x t^2 (x - t) \sin (x - t)\, dt = 4x\theta + 2x\theta \cos x - 6\theta \sin x.$$

Observăm că soluţia (8) se obţine mai uşor prin aplicarea transformatei Laplace ecuaţiei (5).

Într-adevăr, deoarece $L[B] = -\frac{d}{dp} L[\theta \sin x] = \frac{2p}{(p^2+1)^2}$, obţinem :

$$L[X] = -\frac{2}{p^2(p^2+1)} = -\frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^2+1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În consecință

$$X = L^{-1}\left[-\frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^2+1}\right] = -2x\theta + 2\theta\sin x.$$

2. Aplicații ale algebrei de convoluție K'_+ La ecuații diferențiale ordinare

Ecuațiile diferențiale liniare cu coeficienți constanți constituie un caz particular al ecuației de convoluție

$$A * X = B, \quad A \in \mathscr{E}'(R), \quad X, B \in K'(R). \tag{1}$$

Într-adevăr, dacă considerăm $A = P(D)\delta \in \mathscr{E}'(R)$, unde

$$P(D) = a_0 \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} + a_1 \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a_n; \quad a_0 \neq 0 \tag{2}$$

este un operator diferențial liniar cu coeficienți constanți, atunci ecuația (1) devine ecuație diferențială liniară, anume:

$$P(D)X = B. \tag{3}$$

Analog, dacă considerăm $A = \sum_{i=1}^{n} a_i \tau_{h_i}\delta$, $h_i \in R$, atunci obținem ecuația cu diferențe finite $\sum_{i=1}^{n} a_i \tau_{h_i} X = B$.

Definiția 1. Numim soluție fundamentală corespunzătoare operatorului (2) distribuția $E \in K'(R)$ satisfăcînd relația:

$$P(D)\delta * E = P(D)E = \delta. \tag{4}$$

Observăm că dacă $E \in K'(R)$ este o soluție fundamentală a operatorului $P(D)$, atunci distribuția:

$$\tilde{E} = E + Y, \tag{5}$$

unde Y este o soluție a ecuației omogene $P(D)Y = 0$, este de asemenea o soluție fundamentală a operatorului $P(D)$. Aceasta rezultă imediat din relația:

$$P(D)\tilde{E} = P(D)(E+Y) = P(D)E + P(D)Y = P(D)E = \delta.$$

Deoarece elementul $P(D)\delta$ aparține algebrei K'_+, se poate pune problema inversului acestui element în K'_+ deci a existenței soluției fundamentale a operatorului $P(D)$ în K'_+.

În legătură cu aceasta are loc:

Scanned with OKEN Scanner

PROPOZIȚIA 1. *Polinomul diferențial $P(D)$ dat de (2) admite în algebra K'_+ o singură soluție fundamentală având expresia :*

$$E = \theta Y, \tag{6}$$

unde θ este funcția lui Heaviside, iar Y soluția ecuației omogene $P(D)Y=0$, verificînd condițiile inițiale :

$$Y(0)=0,\ Y'(0)=0\ ,\ \ldots\ ,\ Y^{(n-2)}(0)=0,\ Y^{(n-1)}(0)=\frac{1}{a_0}. \tag{7}$$

Demonstrație. În baza propoziției 2 din IV.1.1. este suficient să arătăm existența soluției fundamentale a operatorului $P(D)$ în K'_+. În acest scop observăm că funcția Y este indefinit derivabilă, iar θY deasemenea indefinit derivabilă, cu excepția originii unde are o discontinuitate de speța întîia cu salturile :

$$s(\theta Y^{(\ )}) = Y^{(p)}(0) = 0, \quad p = 0, 1, 2\ ,\ \ldots\ ,\ n-2\ ;$$

$$s(\theta Y^{(n-1)}) = Y^{(n-1)}(0) = 1.$$

Putem astfel scrie :

$$(\theta Y)^{(p)} = \theta Y^{(p)} + \sum_{i=0}^{p-1} s(\theta Y^{(i)})\ \delta^{(p-i-1)},\ p=1, 2\ ,\ \ldots\ ,\ n.$$

În consecință obținem :

$$(\theta Y)^{(p)} = \theta Y^{(p)}, \quad p = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ n-1$$

$$(\theta Y)^{(n)} = \theta Y^{(n)} + \frac{1}{a_0}\ \delta.$$

Deoarece $P(D)Y = 0$, avem :

$$P(D)(\theta Y)=\theta P(D)Y+\delta=\delta.$$

Deci $P(D)\delta * \theta Y=\delta$ și astfel $E=\theta Y$ reprezintă soluția fundamentală în K'_+ a operatorului $P(D)$. Această soluție este evident inversul elementului $P(D)\delta$ în K'_+.

Cu aceasta propoziția este demonstrată.

Remarcăm de asemenea că soluția fundamentală $E = \theta Y$ este o funcție de clasa $C^\infty[0, \infty)$.

Conform propoziției 2 din IV.1.1. ecuația diferențială :

$$P(D)X = f, \quad X,\ f \in K'_+ \tag{8}$$

admite o singură soluție dată de expresia :

$$X = \theta Y * f. \tag{9}$$

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 1. Fie operatorul $P(D) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda$, unde $\lambda \in \Gamma$.

Deoarece soluția generală a ecuației omogene $P(D)Y = 0$ este $= Ce^{\lambda x}$, vom obține pentru soluția fundamentală a operatorului $P(D)$ în K'_+ expresia :

$$E = \theta e^{\lambda x}. \tag{10}$$

Pentru determinarea soluției fundamentale a unui operator în K'_+ este utilă uneori aplicarea propoziției 3 din IV.1.1. În scopul ilustrării acestui caz vom considera :

Exemplul 2. Fie operatorul :

$$P(D) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} + a_1 \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a_n. \tag{11}$$

Notînd cu $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ rădăcinile ecuației :

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0 \tag{12}$$

putem scrie pentru operatorul considerat $P(D)$, descompunerea :

$$P(D) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda_1\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda_2\right) \ldots \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda_n\right).$$

În consecință, distribuția $P(D)\delta \in K'_+$ admite reprezentarea :

$$P(D)\delta = (\delta' - \lambda_1\delta) * (\delta' - \lambda_2\delta) * \ldots * (\delta' - \lambda_n\delta).$$

Deoarece fiecare factor este inversibil în K'_+, în baza propoziției 3 din IV.1.1. obținem pentru soluția fundamentală a operatorului $P(D)$ în K'_+ expresia :

$$E = (P(D)\delta)^{-1} = (\delta' - \lambda_1\delta)^{-1} * (\delta' - \lambda_2\delta)^{-1} * \ldots * (\delta' - \lambda_n\delta)^{-1} =$$

$$= \theta e^{\lambda_1 x} * \theta e^{\lambda_2 x} * \ldots * \theta e^{\lambda_n x}. \tag{13}$$

În particular, dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda$, atunci pentru operatorul corespunzător $P(D) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda\right)^n$ vom obține soluția fundamentală :

$$E = (\theta e^{\lambda x})^{*n}.$$

Dar în baza formulei (9) din III.2.1. expresia soluției fundamentale se poate scrie sub forma :

$$E = \theta \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda x}. \tag{14}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din aceasta rezultă că soluția ecuației :

$$\frac{d^n X}{dx^n} = f, \qquad X, f \in K'_+$$

are expresia :

$$X = 0\,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} * f. \tag{15}$$

Dacă f este o funcție continuă pe $[0, \infty)$ prin explicitarea expresiei (15), vom obține soluția :

$$X = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \int_0^x f(t)\,\dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

care, conform propoziției 7 din II.1.2., corespunde problemei Cauchy cu condiții inițiale nule pentru ecuația diferențială :

$$\frac{d^n X}{dx^n} = f, \quad f \in C^\circ[0, \infty).$$

Problema Cauchy pentru ecuații diferențiale. Fie ecuația diferențială :

$$P(D)X = f, \quad x > 0, \tag{16}$$

unde f este o funcție local integrabilă pe $[0, \infty)$, iar $P(D)$ operatorul diferențial cu coeficienți constanți :

$$P(D) = \frac{d^n}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{d}{dx} + a_n. \tag{17}$$

Definiția 2. Numim problemă Cauchy corespunzătoare ecuației (16), determinarea funcției $X \in C^n[0, \infty)$, care, pentru $x > 0$, verifică ecuația diferențială (16), iar pentru $x = 0$ condițiile inițiale :

$$X(0) = X_0,\ X'(0) = X_1,\ \ldots,\ X^{(n-1)}(0) = X_{n-1}. \tag{18}$$

Această problemă poate fi redusă la o ecuație de convoluție în K'_+ prin prelungirea cu valori nule pentru $x < 0$ atît a funcției f, cît și a soluției X. În acest scop introducem distribuțiile de tip funcție :

$$\bar{f} = 0f, \quad \bar{X} = 0X. \tag{19}$$

Observăm că $\bar{X}$ este o funcție de clasa $C^\infty(R)$ cu excepția originii unde are o discontinuitate de speța întîia. Condițiile inițiale reprezintă salturile funcției $\bar{X}$ și a derivatelor acestora pînă la ordinul $n-1$ inclusiv.

Scanned with OKEN Scanner

În baza formulei 23 din I.5., obţinem :

$$\bar{X}^{(p)} = \tilde{\bar{X}}^{(p)} + \sum_{k=1}^{p} X_{k-1}\delta^{(p-k)}, \qquad p=1, 2, \ldots, n \tag{20}$$

unde $\bar{X}^{(p)}$ şi $\tilde{\bar{X}}^{(p)}$ reprezintă, respectiv, derivatele de ordinul p în sensul distribuţiilor şi în sens obişnuit.

Notînd :

$$F(x) = \bar{f} + \sum_{i=1}^{n} b_i \delta^{(n-i)}, \tag{21}$$

unde

$$b_i = X_{i-1} + a_1 X_{i-2} + \ldots + a_{i-2}X_1 + a_{i-1}X_0, \tag{22}$$

vom obţine ecuaţia diferenţială în spaţiul distribuţiilor :

$$P(D)\bar{X} = F(x); \ \bar{X}, \ F \in K'_+. \tag{23}$$

Această ecuaţie prezintă avantajul că include condiţiile iniţiale ale problemei şi pentru $x>0$ coincide cu ecuaţia iniţială (16).

În consecinţă, rezolvarea problemei Cauchy corespunzătoare ecuaţiei (16) este echivalentă cu rezolvarea în K'_+ a ecuaţiei (23), adică a ecuaţiei de convoluţie în K'_+ :

$$P(D)\delta * X = F. \tag{23'}$$

Fie $E = \theta Y \in K'_+$ soluţia fundamentală corespunzătoare operatorului $P(D)$. Atunci soluţia unică a ecuaţiei (23), respectiv (23') va fi :

$$\bar{X} = E * F.$$

Ţinînd seamă de expresia (21) obţinem soluţia sub formă explicită :

$$\bar{X} = E * f + \sum_{i=1}^{n} b_i E^{(n-i)}.$$

Pentru $x>0$ vom obţine soluţia problemei Cauchy corespunzătoare ecuaţiei (16) şi anume :

$$X = \int_0^x Y(x-t)\, f(t)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} b_i Y^{(n-i)}. \tag{24}$$

Pentru verificare este suficient să aplicăm formula de derivare a integralelor depinzînd de un parametru. Astfel, deoarece $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 0, \ldots, Y^{(n-2)}(0) = 0$, $Y^{(n-1)}(0) = 1$, obţinem

$$X' = \int_0^x Y'(x-t)\, f(t)\mathrm{d}t + Y(0)\, f(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Y^{(n-i)} =$$

$$= \int_0^x Y'(x-t)\, f(t)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Y^{(n-i)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Analog avem :

$$X^{(p)} = \int_0^x Y^{(p)}(x-t)\, f(t)\, \mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}x^p} Y^{(n-i)}, \quad p=1, 2, \ldots, n-1$$

$$X^{(n)} = \int_0^x Y^{(n)}(x-t)\, f(t)\mathrm{d}t + f(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} Y^{(n-i)}.$$

În consecinţă, obţinem :

$$P(D)X = \int_0^x P(D)Y(x-t)\, f(t)\, \mathrm{d}t + f(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i P(D) Y^{(n-i)} = f(x)$$

deoarece $P(D)Y(x-t)=0$ şi $P(D)\, Y^{(n-i)}=0$.
Pe baza relaţiilor scrise se verifică imediat că funcţia X satisface şi condiţiile iniţiale.

Exemplul 3. Fie ecuaţia :

$$X''+\omega^2 X=f, \quad x>0 \tag{25}$$

cu condiţiile iniţiale $X(0)=X_0$, $X'(0)=X_1$; $\omega \in R$ şi f o funcţie local integrabilă pe $[0, \infty)$.

Deoarece $\delta''+\omega^2\delta=(\delta'+\mathrm{i}\omega\delta) * (\delta'-\mathrm{i}\omega\delta)$, avem :

$$E=(\delta''+\omega^2\delta)^{-1} = (\delta'+\mathrm{i}\omega\delta)^{-1} * (\delta'-\mathrm{i}\omega\delta)^{-1} = \theta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} * \theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}.$$

Explicitînd obţinem :

$$E=\theta \int_0^x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x(-t)} \mathrm{d}t = \theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} \int_0^x \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t = \frac{\theta}{\omega} \sin \omega x$$

deci $Y = \dfrac{\sin \omega x}{\omega}$.

Conform formulei (24), soluţia problemei Cauchy va fi :

$$X = Y \circledast f + X_0 Y' + X_1 = \frac{1}{\omega} \int_0^x \sin\, \omega(x-t)\, f(t)\mathrm{d}t + X_0 \cos\, \omega\, x + \frac{X_1}{\omega} \sin\, \omega x.$$

Procedînd printr-un calcul direct, avem :

$$\bar{X} = \theta X, \quad \bar{X}' = X_0\delta + \theta\tilde{X}', \quad \bar{X}'' = X_0\delta' + X_1\delta + \theta\tilde{X}''.$$

În acest fel ecuaţia (25) transpusă în spaţiul distribuţiilor va avea expresia :

$$\bar{X}''+\omega^2\bar{X}=\theta f+X_0\delta'+X_1\delta. \tag{26}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seamă că soluția fundamentală este $E = \theta Y = \dfrac{\theta \sin \omega x}{\omega}$, obținem soluția ecuației (26):

$$X = E * \theta f + X_0 E' + X_1 E.$$

Dar cum $E' = Y\delta + \theta Y' = \theta Y'$, considerînd $x > 0$, vom obține pentru problema Cauchy corespunzătoare ecuației (25) soluția: $X = Y \circledast f + X_0 Y' + X_1$, identică, evident, cu cea găsită anterior.

Exemplul 4. Considerăm ecuația:

$$X^{(n)} = f, \quad x > 0 \tag{27}$$

cu condițiile inițiale $X(0) = X_0$, $X'(0) = X_1, \ldots, X^{(n-1)}(0) = X_{n-1}$ și în ipoteza că f este funcție local integrabilă pe $[0, \infty)$.

Deoarece soluția fundamentală a operatorului $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$ este $E = \theta Y$, $Y = \dfrac{1}{(n-1)!} x^{n-1}$, în baza formulelor (22) și (24), soluția problemei Cauchy corespunzătoare ecuației (27) va avea expresia:

$$X = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \circledast f(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i Y^{(n-i)}$$

unde $b_i = X_{i-1}$, întrucît $a_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Explicînd, obținem:

$$X = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\mathrm{d}t + X_0 + \frac{x}{1!} X_1 + \ldots +$$

$$+ \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} X_{n-2} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} X_{n-1}.$$

Sisteme de ecuații diferențiale. Fie sistemul de ecuații diferențiale de forma:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(a_{ik} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} q_k + b_{ik} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} q_k + c_{ik} q_k \right) = \mathscr{F}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{28}$$

unde $\mathscr{F}_i \in K'_+$ sînt distribuții date, $q_k \in K'_+$ distribuții necunoscute, iar a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} constante. Asemenea ecuații se întîlnesc, de exemplu, la studiul vibrațiilor liniare ale sistemelor mecanice și a circuitelor cu cuplaj inductiv. Pentru transcrierea sub formă matriceală a sistemului (28) introducem operatorii diferențiali:

$$D_{ik} = a_{ik} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + b_{ik} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{29}$$

și vom nota cu X_k soluția fundamentală corespunzătoare operatorului D_{kk} în algebra de convoluție K'_+. Evident, soluția fundamentală X_k este

Scanned with OKEN Scanner

o funcție de clasa $C^\infty[0, \infty)$ și satisface relațiile :

$$D_{kk}X_k = \delta, \; X_k = 0Z_k \tag{30}$$

$$D_{kk}Z_k = 0$$

Dacă $a_{kk} \neq 0$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, atunci :

$$Z_k(0) = 0, \; Z_k'(0) = \frac{1}{a_{kk}}. \tag{31}$$

Considerăm matricele :

$$(a) \in (K_+')^{n\times n}, \quad (\mathscr{F}), \; (q) \in (K_+')^n$$

unde

$$(a) = (D_{ij}\delta) \; (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(\mathscr{F}) = \begin{pmatrix} \mathscr{F}_1 \\ \vdots \\ \mathscr{F}_n \end{pmatrix}, \; (q) = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Cu acestea sistemul (28) se poate scrie sub forma unei ecuații matriceale de convoluție și anume :

$$(a) * (q) = (\mathscr{F}). \tag{33}$$

PROPOZIȚIA 2. *Dacă* $a_{ii} \neq 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, *atunci ecuația* (33) *este echivalentă cu ecuația :*

$$(a^1) * (q) = (\mathscr{F}^1), \tag{34}$$

unde distribuțiile matriceale $(a^1) \in (K_+')^{n\times n}, (\mathscr{F}^1) \in (K_+')^n$ *au expresiile:*

$$(a^1) = (a_{ij}\delta) + (\theta a_{ii}D_{ij}Z_i); \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$(\mathscr{F}^1) = \begin{pmatrix} a_{11}X_1 * \mathscr{F}_1 \\ \vdots \\ a_{nn}X_n * \mathscr{F}_n \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Demonstrație. Fie matricea diagonală $(d)=(a_{ii}X_i\delta_{ij}) \in (K_+')^{n\times n}$, unde $\delta_{ij}(i, j= 1, 2, \ldots, n)$ reprezintă simbolul lui Kronecker.

Efectuînd înmulțirea la stînga a ecuației (33) cu matricea diagonală (d) obținem :

$$(a_{ii}X_i\delta_{ij}) * (D_{ij}\delta) = (a_{ii}X_i * D_{ij}\delta) = (a_{ii}D_{ij}X_i)$$

$$(a_{ii}X_i\delta_{ij}) * (\mathscr{F}) = (\mathscr{F}^1)$$

deci

$$(a_{ii}D_{ij}X_i) * (q) = (\mathscr{F}^1). \tag{36}$$

Scanned with OKEN Scanner

În baza relaţiilor (30), (31) şi a formulei (21) din I.5., avem :

$$D_{ij}a_{ii}X_i = a_{ij}\delta + \theta a_{ii}D_{ij}Z_i.$$

Prin introducerea acestei expresii în (36) vom obţine relaţia (34). În ce priveşte echivalenţa ecuaţiilor (33) şi (34), aceasta este o consecinţă a faptului că matricea diagonală (d) este diferită de zero şi că algebra K'_+ nu are divizori ai lui zero.

Este important să remarcăm că matricea $(a^1)\in(K'_+)^{n\times n}$ definită prin formula (35) reprezintă suma dintre matricea $(a_{ij}\delta)$, care este o distribuţie matriceală cu suport punctual şi matricea $(\theta a_{ii}D_{ij}Z_i)$, care este o distribuţie matriceală de tip funcţie. În legătură cu inversibilitatea elementului (a^1) are loc :

PROPOZIŢIA 3. *Dacă* $\Delta=|a_{ij}|\neq 0$ *şi* $a_{ii}\neq 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, *atunci elementul* $(a^1)\in(K'_+)^{n\times n}$ *este inversabil în* $(K'_+)^{n\times n}$ *şi are expresia* :

$$(a^1)^{-1} = \delta(a_{ij})^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,[(a_{ij})^{-1}\cdot(\theta a_{ii}D_{ij}Z_i)]^{*k}\cdot(a_{ij})^{-1}. \tag{37}$$

Demonstraţie. Deoarece $\Delta\neq 0$, rezultă că matricea $(a_{ij}\delta)$ este inversibilă în $(K'_+)^{n\times n}$ şi avem :

$$(a_{ij}\delta)^{-1} = \delta(a_{ij})^{-1}. \tag{38}$$

În consecinţă, produsul $(a_{ij}\delta)^{-1} * (\theta a_{ii}D_{ij}Z_i)\in(K'_+)^{n\times n}$ este o distribuţie matriceală de tip funcţie, avînd expresia :

$$A=(a_{ij}\delta)^{-1} * (\theta a_{ii}D_{ij}Z_i) = (a_{ij})^{-1}\cdot(\theta a_{ii}D_{ij}Z_i). \tag{39}$$

Pentru astfel de matrice A, ale căror elemente sînt funcţii, definim norma prin formula :

$$\|A\| = \sum_{i,j=1}^{n}|h_{ij}|, \qquad A=(h_{ij}). \tag{40}$$

Dacă A şi B sînt matrice pătrate de tip funcţie, continue şi de acelaş ordin, atunci avem :

$$\|A.B\| \leqslant \|A\|\cdot\|B\| \tag{41}$$

$$\left\|\int A(x)\,dx\right\| \leqslant \int \|A(x)\|\,dx.$$

Notînd $U=(\delta\delta_{ij})$ elementul unitate în $(K'_+)^{n\times n}$, vom arăta că elementul $U+A\in(K'_+)^{n\times n}$ este inversibil în $(K'_+)^{n\times n}$ pentru $x\in[0, t_1]$ şi avem :

$$(U+A)^{-1} = U + \sum_{k=}^{\infty}(-1)^k A^{*k} = \sum_{k=}^{\infty}(-1)^k A^{*k}. \tag{42}$$

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, notînd $M = \max\limits_{x\in[0,\,t_1]} \|A(x)\|$, obţinem :

$$\|A^{*2}\| \leqslant \int_0^x \|A(\xi)\| \cdot \|A(x-\xi)\|\, \mathrm{d}\xi \leqslant M^2 x \leqslant M^2 t_1.$$

Prin inducţie găsim :

$$\|A^{*k}\| \leqslant \frac{M^k x^{k-1}}{(n-1)!} \leqslant \frac{M^k t_1^{k-1}}{(n-1)!}.$$

În consecinţă, seria matriceală (42) converge uniform pentru $x \in [0, t_1]$. Cum matricea $A \in (K'_+)^{n\times n}$ este continuă pe $[0, \infty)$, deducem că seria (42) converge uniform pentru $x \geqslant 0$.

Efectuînd produsul $(U+A) * \sum\limits_{k=0} (-1)^k A^{*k}$ ne convingem de valabilitatea egalităţii (42).

Deoarece matricea (a^1) se poate scrie sub forma :

$$(a^1) = (a_{ij}\delta) * (U+A)$$

şi ambii factori sînt inversibili în $(K'_+)^{n\times n}$, în baza egalităţii (42) obţinem :

$$(a^1)^{-1} = (U+A)^{-1} * (a_{ij}\delta)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [(a_{ij}\delta)^{-1} * (\theta a_{ii} D_{ij} Z_i)]^{*k} * (a_{ij}\delta)^{-1} =$$

$$= \delta(a_{ij})^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k [(a_{ij})^{-1} \cdot (\theta a_{ii} D_{ij} Z_i)]^{*k} \cdot (a_{ij})^{-1}. \tag{43}$$

Cu aceasta propoziţia este demonstrată.
În acest fel soluţia ecuaţiei (34), respectiv (33), în $(K'_+)^n$ va fi :

$$(q) = (a^1)^{-1} * (\mathscr{F}^1) = (a_{ij})^{-1} \cdot (\mathscr{F}^1) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k [(a_{ij})^{-1} \cdot (\theta a_{ii} D_{ij} Z_i))^{*k} \cdot (a_{ij})^{-1}] * (\mathscr{F}^1). \tag{44}$$

Caz particular. Considerînd $a_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, atunci matricea (a_{ij}) devine :

$$(a_{ij}) = (a_{ii}\delta_{ij})$$

şi în consecinţă avem :

$$(a_{ij}\delta)^{-1} = \delta(a_{ij})^{-1} = \delta(a_{ii}\delta_{ij})^{-1} = \delta(a_{ii}^{-1}\delta_{ij})$$
$$(a_{ij})^{-1} \cdot (\theta a_{ii} D_{ij} Z_i) = (a_{ii}^{-1}\delta_{ij}) \cdot (\theta a_{ii} D_{ij} Z_i) = (\theta D_{ij} Z_i). \tag{45}$$

Cu acestea formula (44) se simplifică şi obţinem :

$$(q) = (\mathscr{F}^2) + \sum_{k=1}^{\infty} [(-1)^k (\theta D_{ij} Z_i)^{*k} \cdot (a_{ii}^{-1}\delta_{ij})] * (\mathscr{F}^1), \tag{46}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$(\mathscr{F}^2) = \begin{pmatrix} X_1 * \mathscr{F}_1 \\ \vdots \\ X_n * \mathscr{F}_n \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Pentru $n=2$ formula (46) devine:

$$(q) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} (\theta D_{12}Z_1 * \theta D_{21}Z_2)^{*k} * (X_1 * \mathscr{F}_1 - \theta D_{12}Z_1 * X_2 * \mathscr{F}_2) \\ (\theta D_{12}Z_1 * \theta D_{21}Z_2)^{*k} * (X_2 * \mathscr{F}_2 - \theta D_{21}Z_2 * X_1 * \mathscr{F}_1) \end{pmatrix},$$

unde se consideră: $(\theta D_{ij}Z_i)^{*0} = \delta$.
Într-adevăr, în acest caz avem:

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (a_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Deoarece $D_{11}Z_1=0$, $D_{22}Z_2=0$, obținem:

$$(\theta D_{ij}Z_i) = \begin{pmatrix} 0 & \theta D_{12}Z_1 \\ \theta D_{21}Z_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observăm că pentru orice matrice de ordinul 2 de forma $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ avem relația:

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{cases} (\alpha\beta)^{\frac{k}{2}} E & , k \text{ par} \\ (\alpha\beta)^{\frac{k-1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, & k \text{ impar} \end{cases} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Din acest motiv putem scrie:

$$(\theta D_{ij}Z_i)^{*k} = \begin{cases} (\theta D_{12}Z_1 * \theta D_{21}Z_2)^{*\frac{k}{2}} * \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, & k \text{ par} \\ (\theta D_{12}Z_1 * \theta D_{21}Z_2)^{*\frac{k-1}{2}} * \begin{pmatrix} 0 & \theta D_{12}Z_1 \\ \theta D_{21}Z_2 & 0 \end{pmatrix}, & k \text{ impar.} \end{cases}$$

Notînd $A = (\theta D_{12}Z_1 * \theta D_{21}Z_2)$ și grupînd termenii de puteri pare și respectiv de puteri impare în formula (46), obținem pentru (q) expresia:

$$(q) = \begin{pmatrix} X_1 * \mathscr{F}_1 \\ X_2 * \mathscr{F}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a_{22}^{-1}\theta D_{12}Z_1 \\ \theta a_{11}^{-1} D_{21}Z_2 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{11}X_1 * \mathscr{F}_1 \\ a_{22}X_2 * \mathscr{F}_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \begin{pmatrix} a_{11}^{-1}A^{*m} & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1}A^{*m} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{11}X_1 * \mathscr{F}_1 \\ a_{22}X_2 * \mathscr{F}_2 \end{pmatrix} -$$

$$- \sum_{m=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & a_{22}^{-1}A^{*m} * \theta D_{12}Z_1 \\ a_{11}^{-1}A^{*m} * \theta D_{21}Z_2 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{11}X_1 * \mathscr{F}_1 \\ a_{22}X_2 * \mathscr{F}_2 \end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Adică

$$(q)=\begin{pmatrix} X_1 * \mathscr{F}_1 - \theta D_{12} Z_1 * X_2 * \mathscr{F}_2 \\ X_2 * \mathscr{F}_2 - \theta D_{21} Z_2 * X_1 * \mathscr{F}_1 \end{pmatrix} + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \begin{pmatrix} A^{*m} * X_1 * \mathscr{F}_1 - A^{*m} * X_2 * \mathscr{F}_2 * \theta D_{12} Z_1 \\ A^{*m} * X_2 * \mathscr{F}_2 - A^{*m} * X_1 * \mathscr{F}_1 * \theta D_{21} Z_2 \end{pmatrix},$$

de unde rezultă formula (48).

Exemplul 5. Fie sistemul de ecuaţii în algebra K'_+ anume:

$$\begin{aligned} X_1'' + X_1 - X_2 &= b_1 \\ X_2'' - X_2 + X_1 &= b_2. \end{aligned} \qquad X_1, X_2; b_1, b_2 \in K'_1. \qquad (49)$$

Notînd:

$$(a)=\begin{pmatrix} \delta''+\delta & -\delta \\ \delta & \delta''-\delta \end{pmatrix} \in (K'_+)^{2\times 2}; \qquad (X)=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \ (b)=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in (K'_+)^2,$$

sistemul considerat sub forma unei ecuaţii matriceale de convoluţie se va scrie:

$$(a) * (X) = (b). \qquad (50)$$

Deoarece $\Delta = \det(a) = \delta^{(IV)}$, matricea este inversibilă în K'_+ şi avem:

$$\Delta^{-1} = \theta \frac{x^3}{6}.$$

În consecinţă soluţia fundamentală a ecuaţiei (50) în $(K'_+)^{2\times 2}$ va fi:

$$(E)=(a)^{-1}=\Delta^{-1} * \begin{pmatrix} \delta''-\delta & \delta \\ -\delta & \delta''+\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta x - \frac{\theta x^3}{6} & \frac{\theta x^3}{6} \\ -\frac{\theta x^3}{6} & \theta x + \frac{\theta x^3}{6} \end{pmatrix}.$$

Pentru ecuaţia (50), respectiv sistemul (49) vom obţine soluţia unică în $(K'_+)^2$ anume:

$$(X)=(E) * (b)$$

adică

$$X_1 = \left(\theta x - \frac{\theta x^3}{6}\right) * b_1 + \frac{\theta x^3}{6} * b_2$$

$$X_2 = -\frac{\theta x^3}{6} * b_1 + \left(\theta x + \frac{\theta x^3}{6}\right) * b_2.$$

Problema Cauchy pentru sisteme de ecuații diferențiale. Fie sistemul de ecuații :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\frac{\mathrm{d}^2q_k}{\mathrm{d}x^2}+b_{ik}\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}x}\ c_{ik}q_k\right)=F_i(x)\quad(i=1,2,\ldots,n),\tag{51}$$

unde F_i sînt funcții local integrabile pe $[0,\infty)$, iar a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} constante. Problema Cauchy corespunzătoare sistemului (51) constă în determinarea funcțiilor $q_k\in C^2[0,\infty)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ care pentru $x>0$ verifică sistemul (51), iar pentru $x=0$ condițiile inițiale :

$$q_k(0)=q_{k,0}\,;\quad \dot{q}_k(0)=\dot{q}_{k,0}\quad(k=1,2,\ldots,n).\tag{52}$$

Introducem funcțiile :

$$\bar{q}_k=\theta q_k,\quad \bar{F}_k=\theta F_k.\tag{53}$$

Notînd cu $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}x}$ respectiv derivata în sensul distribuțiilor și în sens obișnuit, obținem :

$$\frac{\mathrm{d}\bar{q}_k}{\mathrm{d}x}=\frac{\tilde{\mathrm{d}}q_k}{\mathrm{d}x}+q_{k,0}\delta$$

$$(k=1,2,\ldots,n)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\bar{q}_k}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\tilde{\mathrm{d}}^2q_k}{\mathrm{d}x^2}+\dot{q}_{k,0}\delta+q_{k,0}\delta'.$$

În baza acestor formule sistemul de ecuații (51), în spațiul distribuțiilor, se va transcrie sub forma :

$$\sum_{k=1}^{n}D_{ik}\bar{q}_k=\mathscr{F}_i\quad(i=1,2,\ldots,n),\tag{54}$$

unde operatorii :

$$D_{ik}=a_{ik}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+b_{ik}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+c_{ik}\qquad(i,k=1,2,\ldots,n)$$

sînt considerați în $K'(R)$, iar distribuțiile $\mathscr{F}_i\in K'_+$ au expresiile :

$$\mathscr{F}_i=\bar{F}_i+\sum_{k=1}^{n}[(a_{ik}\dot{q}_{k,0}+b_{ik}q_{k,0})\delta+a_{ik}q_{k,0}\delta'].\tag{55}$$

În acest fel problema Cauchy pentru sistemul (51) s-a redus la rezolvarea ecuației matriceale de convoluție :

$$(a)*(\bar{q})=(\mathscr{F}),\tag{56}$$

unde

$$(a) = (D_{ik}\delta) \in (K'_+)^{n\times n},\ (\bar{q}),\ (\mathscr{F}) \in (K'_+)^n$$

$$(\bar{q}) = \begin{pmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \vdots \\ \bar{q}_n \end{pmatrix}, \quad (\mathscr{F}) = \begin{pmatrix} \mathscr{F}_1 \\ \mathscr{F}_2 \\ \vdots \\ \mathscr{F}_n \end{pmatrix}.$$

Dacă $\det(a) \in K'_+$ este inversibilă în algebra de convoluție K'_+, atunci cu ajutorul soluției fundamentale $(E)=(a)^{-1}$ vom obține soluția unică a ecuației (56) anume:

$$(\bar{q}) = (E) * (\mathscr{F}). \tag{57}$$

Pentru $x>0$, din (57) vom obține soluția problemei Cauchy corespunzătoare sistemului (51).

Exemplul 6. Fie sistemul de ecuații:

$$\ddot{q}_1 + q_1 - q_2 = F_1(x)$$
$$\ddot{q}_2 - q_2 + q_1 = F_2(x)$$

cu condițiile inițiale:

$$q_1(0) = q_{1,0};\quad \dot{q}_1(0) = \dot{q}_{1,0},\quad q_2(0) = q_{2,0};\quad \dot{q}_2(0) = \dot{q}_{2,0}.$$

Sistemul considerat în spațiul distribuțiilor se va scrie:

$$\begin{pmatrix} \delta''+\delta & -\delta \\ \delta & \delta''-\delta \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta F_1 + q_{1,0}\delta' + \dot{q}_{1,0}\delta \\ \theta F_2 + q_{2,0}\delta' + \dot{q}_{2,0}\delta \end{pmatrix}.$$

Ținînd seamă de soluția fundamentală obținută în exemplul precedent, avem:

$$(\bar{q}) = \begin{pmatrix} \theta x - \dfrac{\theta x^3}{6} & \theta\dfrac{x^3}{6} \\ -\theta\dfrac{x^3}{6} & \theta x + \dfrac{\theta x^3}{6} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \theta F_1 + q_{1,0}\delta' + \dot{q}_{1,0}\delta \\ \\ \theta F_2 + q_{2,0}\delta' + \dot{q}_{2,0}\delta \end{pmatrix}.$$

Explicitînd, obținem pentru $x>0$ soluția problemei Cauchy:

$$q_1 = \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \circledast F_1 + \frac{x^3}{6} \circledast F_2 + q_{1,0}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + \dot{q}_{1,0}\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + q_{2,0}\frac{x^2}{2} + \dot{q}_{2,0}\frac{x^3}{6}$$

$$q_1 = -\frac{x^3}{6} \circledast F_1 + \left(x + \frac{x^3}{6}\right) \circledast F_2 - q_{1,0}\frac{x^2}{2} - \dot{q}_{1,0}\frac{x^3}{6} + q_{2,0}\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) + \dot{q}_{2,0}\left(x + \frac{x^3}{6}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

3. Ecuații integro-diferențiale de tip convolutiv

O aplicație importantă a algebrei de convoluție K'_+ o constituie studiul ecuațiilor integro-diferențiale de tip convolutiv, care reprezintă o clasă specială de ecuații integro-diferențiale liniare în raport cu funcția necunoscută. Rezolvarea acestei clase de ecuații se reduce la aceea a ecuațiilor de convoluție în algebra K'_+.

Forma generală a unei ecuații integro-diferențiale de tip convolutiv este:

$$D_1 y(x) + \int_0^x D_2 y(t)\, f(x-t)\, dt = g(x), \qquad x \geqslant 0 \tag{1}$$

unde f și g sînt funcții date, y funcția necunoscută, iar D_1, D_2 operatori diferențiali cu coeficienți constanți de ordine respectiv n și $m (n \geqslant m)$, anume:

$$D_1 = a_0 \frac{d^n}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{d}{dx} + a_n$$

$$D_2 = b_0 \frac{d^m}{dx^m} + b_1 \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{d}{dx} + b_m. \tag{2}$$

Relativ la ecuația integro-diferențială (1) vom presupune că termenul liber g este o funcție local integrabilă pe $[0, \infty)$ și nucleul f o funcție de clasa $C^m[0, \infty)$.

În particular, dacă $D_1 = D_2 = 1$, atunci ecuația (1) devine:

$$y(x) + \int_0^x y(t)\, f(x-t)\, dt = g(x), \qquad x \geqslant 0 \tag{3}$$

care reprezintă o ecuație integrală particulară Volterra de speța II. În acest caz nucleul f cît și termenul liber g este suficient să se considere funcții local integrabile pe $[0, \infty)$.

Ecuația integrală:

$$\int_0^x y(t)\, f(x-t)\, dt = g(x), \qquad x \geqslant 0 \tag{4}$$

care se obține din (1) pentru $D_1 = 0$, $D_2 = 1$, reprezintă o ecuație integrală particulară Volterra de speța întîia.

Rezolvarea ecuației (1) constă în determinarea funcției y de clasa $C^n[0, \infty)$ care să satisfacă ecuația (1) și condițiile inițiale:

$$y^{(l)}(0) = y_l, \quad (l = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \tag{5}$$

Pentru a transcrie ecuația integro-diferențială (1) sub forma unei ecuații de convoluție în algebra K'_+, vom prelungi prin valoarea zero pentru $x < 0$ funcțiile y, f, g și vom nota aceste noi funcții prin $\bar{y}, \bar{f}, \bar{g}$.

Scanned with OKEN Scanner

În acest fel condițiile inițiale (5) reprezintă salturile în origine a funcției necunoscute y și a derivatelor sale pînă la ordinul $n-1$ inclusiv.

Pentru a distinge operațiile de derivare în sens obișnuit de acelea în sensul teoriei distribuțiilor vom nota cu D_1, D_2 și $\tilde{D}_1$, $\tilde{D}_2$ operatorii (2) considerați respectiv în sensul distribuțiilor și în sens obișnuit.

Ecuația (1) pentru $x \in R$ se transcrie astfel sub forma :

$$\tilde{D}_1\bar{y} + \tilde{D}_2\bar{y} * \bar{f} = \bar{g}. \tag{1'}$$

Deoarece funcția $\bar{y}$ și derivatele ei au numai discontinuități de speța întîia în origine, putem scrie relațiile :

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}x^\alpha}\bar{y} = \frac{\tilde{\mathrm{d}}^\alpha}{\mathrm{d}x^\alpha}\bar{y} + y_0\delta^{(\alpha-1)}(x) + y_1\delta^{(\alpha-2)}(x) + \ldots + y_{\alpha-1}\delta(x) \tag{6}$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, n.$$

În consecință, obținem :

$$D_1\bar{y} = \tilde{D}_1\bar{y} + \bar{D}_1\delta(x) \tag{7}$$

$$D_2\bar{y} = \tilde{D}_2\bar{y} + \bar{D}_2\delta(x), \tag{8}$$

unde $\bar{D}_1\delta$, $\bar{D}_2\delta$ au expresiile :

$$\bar{D}_1\delta = \sum_{k=0}^{n-1} s_k\delta^{(k)}(x); \quad s_k = a_0y_{n-1-k} + a_1y_{n-2-k} + \ldots + a_{n-k-1}y_0$$

$$\bar{D}_2\delta = \sum_{k=0}^{m-1} v_k\delta^{(k)}(x); \quad v_k = b_0y_{m-1-k} + b_1y_{m-2-k} + \ldots + b_{m-k-1}y_0.$$

Ținînd seamă de relațiile (7) și (8) ecuația (1') se poate scrie sub forma unei ecuații de convoluție în algebra K'_+ :

$$D_1\bar{y} + D_2\bar{y} * \bar{f} = \bar{g} + \bar{D}_1\delta + \bar{D}_2\delta * f, \tag{9}$$

adică

$$\bar{y} * (D_1\delta + D_2\bar{f}) = \bar{g} + \bar{D}_1\delta + \bar{D}_2\bar{f}. \tag{9'}$$

În baza relației (8) avem :

$$D_1\delta + D_2\bar{f} = D_1\delta + \bar{D}_2\delta + \tilde{D}_2\bar{f}. \tag{10}$$

Notînd cu D_3 operatorul :

$$D_3 = D_1 + \bar{D}_2,$$

obținem ecuația de convoluție în K'_+ :

$$\bar{y} * (D_3\delta + \tilde{D}_2\bar{f}) = g_1, \tag{11}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde g_1 are expresia :

$$g_1 = \bar{g} + \bar{D}_1\delta + \bar{D}_2\bar{f}. \tag{12}$$

Fie $E_1 \in K'_+$ soluţia fundamentală corespunzătoare operatorului D_3. În baza propoziţiei 3 din IV.2.1. putem scrie :

$$(D_3\delta + \tilde{D}_2\bar{f})^{-1} = (D_3\delta * [\delta + (D_3\delta)^{-1} * \tilde{D}_2\bar{f}])^{-1} =$$

$$= (D_3\delta)^{-1} * (\delta + (D_3\delta)^{-1} * \tilde{D}_2\bar{f})^{-1} = E_1 * (\delta + E_1 * \tilde{D}_2\bar{f})^{-1}.$$

Observăm că soluţia fundamentală $E_1 \in K'_+$ a operatorului D_3 este o funcţie de clasa $C^\infty[0, \infty)$ şi în consecinţă elementul

$$A = E_1 * \tilde{D}_2\bar{f} \in K'_+ \tag{14}$$

este o funcţie continuă pe $[0, \infty)$.

PROPOZIŢIA 1. *Fie $h \in K'_+$ o funcţie local integrabilă şi mărginită pe orice interval finit. Atunci elementul $\delta + h = h_1 \in K'_+$ este inversibil în K'_+ şi inversul său are expresia :*

$$h_1^{-1} = \delta + H, \tag{15}$$

unde $H \in K'_+$ şi este dată de expresia :

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n h^{*n}. \tag{16}$$

Demonstraţie. Urmînd demonstraţia dată pentru seria matriceală (42) din IV.2.2. şi considerînd $n=1$, pentru $x \in [0, a]$ obţinem evaluarea :

$$|h^{*2}| \leqslant \int_0^x |h(x-t)|\,|h(t)|\,dt \leqslant xM_a^2,$$

unde

$$M_a = \sup_{x \in [0,\ a]} |h(x)|.$$

Prin inducţie găsim :

$$|h^{*n}| \leqslant \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} M_a^n, \quad x \in [0, a].$$

În acest fel seria (16), pe intervalul $[0, a]$, este majorată de seria numerică convergentă $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} M_a^n$ şi în consecinţă seria de funcţii (16) este uniform convergentă pe orice segment $[0, a]$.

Deci distribuţia (15) are sens şi se verifică uşor că este inversa distribuţiei h în algebra de convoluţie K'_+.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $x<0$, $H=0$ și în cazul că h este o funcție continuă, atunci și H este funcție continuă.

COROLAR. *Dacă* $E_1 \in K'_+$ *reprezintă soluția fundamentală a operatorului* $D_3(n\geqslant 1)$, *atunci elementul* $(D_3\delta + \tilde{D}_2\bar{f}) \in K'_+$ *este inversul în* K'_+ *și avem* :

$$(D_3\delta + \tilde{D}_2\bar{f})^{-1} = E_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n E_1^{*(n+1)} * (\tilde{D}_2\bar{f})^{*n}. \tag{17}$$

Într-adevăr, ținînd seamă de relațiile (13), (15) și deoarece $h = E_1 * \tilde{D}_2\bar{f} \in K'_+$ este o funcție continuă pe $[0, \infty)$, obținem :

$$E = (D_3\delta + \tilde{D}_2\bar{f})^{-1} = E_1 * (\delta + E_1 * \tilde{D}_2\bar{f})^{-1} =$$

$$= E_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n E_1^{*(n+1)} * (\tilde{D}_2\bar{f})^{*n}. \tag{18}$$

În consecință soluția ecuației (11) în K'_+ este :

$$\bar{y} = E * g_1 = E * \bar{g} + \bar{D}_1 E + \bar{D}_2\bar{f} * E. \tag{19}$$

Pentru $x>0$ vom obține soluția ecuației (1) cu condițiile inițiale (5)

Caz particular. Dacă $D_1=D_2=1$, ecuația de convoluție (11) devine

$$\bar{y} * (\delta + \bar{f}) = \bar{g} \tag{20}$$

deoarece $\bar{D}_1=\bar{D}_2=0$ și $\tilde{D}_1=D_1$, $D_3=D_1$ conform propoziției 1 inversul elementului $(\delta+\bar{f}) \in K'_+$ va fi :

$$E = (\delta + \bar{f})^{-1} = \delta + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \bar{f}^{*n}, \tag{21}$$

iar soluția ecuației (20) în K'_+ este :

$$\bar{y} = \bar{g} + H * \bar{g}, \tag{22}$$

unde

$$H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \bar{f}^{*n}.$$

Considerînd $x\geqslant 0$ vom obține de aici soluția ecuației (3) a lui Volterra de speța II, anume :

$$y = g(x) + \int_0^x H(x-t)\, g(t)\, dt. \tag{23}$$

Menționăm că dacă distribuțiile $\bar{g}, \bar{f} \in K'_+$ admit transformată Laplace, atunci ecuația (11) poate fi rezolvată cu ajutorul acestei transformate.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 1. Fie ecuaţia integro-diferenţială :

$$y'' + \int_0^x e^{2(x-t)} y'(t)\,dt = e^x, \quad x \geqslant 0 \tag{24}$$

cu condiţiile iniţiale :

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1.$$

Notînd $\bar{y} = \theta y$, ecuaţia considerată pentru $x \in R$ se va scrie :

$$\frac{\tilde{d}^2}{dx^2}\bar{y} + \theta e^{2x} * \frac{\tilde{dy}}{dx} = \theta e^x.$$

În baza condiţiilor iniţiale date şi a regulii de derivare a distribuţiilor avem :

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = y_0\delta + \frac{\tilde{d\bar{y}}}{dx}; \quad \frac{d^2\bar{y}}{dx^2} = y_0\delta' + y_1\delta + \frac{\tilde{d^2\bar{y}}}{dx^2}.$$

Cu acestea ecuaţia (24) se va transcrie ca o ecuaţie de convoluţie în K'_+, anume :

$$\bar{y} * (\delta'' + (\theta e^{2x})') = y_0\delta' + y_1\delta + y_0\theta e^{2x} + \theta e^x.$$

Deoarece distribuţiile ce figurează în ecuaţie admit transformată Laplace, obţinem :

$$L[\bar{y}]\left(p^2 + \frac{p}{p-2}\right) = y_0 p + y_1 + \frac{y_0}{p-2} + \frac{1}{p-1},$$

adică

$$L[\bar{y}] = \frac{y_0}{p-1} - \frac{y_0}{(p-1)^2} + \frac{y_1}{p(p-1)} + \frac{1+y_0-y_1}{p(p-1)^2} - \frac{1}{p(p-1)^3}.$$

În consecinţă, prin aplicarea transformatei Laplace inversă găsim :

$$\bar{y} = \theta y_0 e^x - y_0\theta x e^x + y_1(\theta e^x - \theta) + (1 + y_0 - y_1)(\theta x e^x - \theta e^x + \theta) -$$

$$- \frac{\theta x^2 e^x}{2} + \theta x e^x - \theta e^x + \theta,$$

deci

$$\bar{y} = -\theta\frac{x^2 e^x}{2} + \theta y_0 + y_1(2\theta e^x - \theta x e^x - 2\theta) + 2(\theta x e^x - \theta e^x + \theta).$$

Pentru $x \geqslant 0$ obţinem astfel soluţia ecuaţiei (24) :

$$y(x) = -\frac{x^2 e^x}{2} + y_0 + y_1(2e^x - xe^x - 2) + 2(xe^x - e^x + 1).$$

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 2. Fie ecuaţia integrală Volterra de speţa II:

$$y + \int_0^x e^{x-t} y(t)\,dt = f(x), \quad x \geqslant 0.$$

Ecuaţia de convoluţie corespunzătoare în K'_+ este:

$$\bar{y} * (\delta + \theta e^x) = \bar{f},$$

unde $\bar{f} = \theta f$, $\bar{y} = \theta y$.

Conform propoziţiei 1 soluţia fundamentală corespunzătoare ecuaţiei de convoluţie va fi:

$$E = (\delta + \theta e^x)^{-1} = \delta + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\theta e^x)^{*n}.$$

Dar conform formulei (9) din III.2.1. deoarece

$$(\theta e^x)^{*n} = \theta \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^x,$$

vom obţine pentru soluţia fundamentală expresia:

$$E = \delta + e^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \theta \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Seria din membrul drept se poate calcula ţinînd seama că avem:

$$-e^{-x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

În consecinţă, avem pentru soluţia fundamentală expresia:

$$E = \delta - \theta.$$

Cu aceasta soluţia ecuaţiei de convoluţie în K'_+ va fi:

$$\bar{y} = E * \bar{f} = \bar{f} - \theta * \bar{f}.$$

Pentru $x \geqslant 0$ găsim soluţia ecuaţiei integrale considerată, anume:

$$y(x) = f(x) - \int_0^x f(x-t)\,dt.$$

În particular, pentru $f=1$ obţinem soluţia:

$$y = 1 - x, \text{ deoarece } \theta^{*2} = x_+.$$

§ 3. Ecuaţii cu derivate parţiale. Soluţii fundamentale şi rezolvarea problemei Cauchy

Ecuaţiile cu derivate parţiale cu coeficienţi constanţi constituie un caz particular al ecuaţiilor de convoluţie. Din acest motiv studiul lor este strîns legat de noţiunile de soluţie fundamentală a unui operator şi soluţie fundamentală a problemei Cauchy.

$$\text{Fie} \quad P(D)=\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha, \quad a_\alpha \in \Gamma, \quad D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} \tag{1}$$

un operator diferenţial liniar cu coeficienţi constanţi. Atunci ecuaţia:

$$P(D)X=f, \qquad X, f \in K'(R^n) \tag{2}$$

este echivalentă cu ecuaţia de convoluţie:

$$P(D)\delta * X = f. \tag{3}$$

Analog, fie matricea $(a) \in (K')^{m\times m}$ avînd elementele:

$$a_{ij} = P_{ij}(D)\delta, \text{ unde } P_{ij}(D) \quad (i, j=1, 2, \ldots, m)$$

sînt operatori diferenţiali liniari cu coeficienţi constanţi.

Sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale:

$$\sum_{j=1}^{m} P_{ij}(D)\, X_j = f_i\,;\; X_i, f_i \in K'(R^n)\; (i, j=1, 2, \ldots, m) \tag{4}$$

este echivalent cu ecuaţia matriceală de convoluţie:

$$(a) * (X)=(f), \tag{5}$$

unde

$$(X)=\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix}, \quad (f)=\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}.$$

Definiţia 1. Numim soluţie fundamentală corespunzătoare matricei de operatori $(a)=(P_{ij}(D)\delta)$ o distribuţie matriceală $(E) \in (K')^{m\times m}$ care satisface relaţia:

$$(E) * (P_{ij}(D)\delta) = (P_{ij}(D)\delta) * (E) = (\delta). \tag{6}$$

În particular soluţia fundamentală corespunzătoare operatorului $P(D)$ sau ecuaţiei (2) este distribuţia $E \in K'(R^n)$ care verifică condiţia:

$$P(D)\delta * E = \delta, \tag{7}$$

Scanned with OKEN Scanner

adică

$$P(D)E = \delta. \tag{7'}$$

Pentru ecuaţii diferenţiale ordinare liniare şi cu coeficienţi constanţi s-a arătat existenţa şi unicitatea soluţiei fundamentale în algebra de convoluţie K'_+. Utilizînd transformata Fourier, în [40] şi [32] se demonstrează că orice operator diferenţial liniar cu coeficienţi constanţi are o soluţie fundamentală în spaţiul $K'(R^n)$.

PROPOZIŢIA 1. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca distribuţia $E \in S'(R^n)$ să fie o soluţie fundamentală a operatorului $P(D)$ definit prin (1), este ca transformata ei Fourier $\hat{E}(\xi)$ să verifice ecuaţia :*

$$P(-\mathrm{i}\xi)\,\hat{E} = 1, \tag{8}$$

unde

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha, \qquad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}. \tag{9}$$

Într-adevăr, să presupunem că $E \in S'(R^n)$ este o soluţie fundamentală a operatorului $P(D)$. Atunci, deoarece $P(D)E = P(D)\delta * E = \delta$, prin aplicarea transformatei Fourier obţinem :

$\widehat{P(D)E} = 1$, adică $P(-\mathrm{i}\xi)\hat{E} = 1$ şi cu aceasta necesitatea condiţiei este dovedită. În ce priveşte suficienţa condiţiei, observăm că dacă $\hat{E}$ satisface relaţia (8), atunci, procedînd invers, obţinem :

$$\widehat{P(D)E} = P(-\mathrm{i}\xi)\,\hat{E} = 1,$$

de unde rezultă că $P(D)E = \delta$ şi cu aceasta propoziţia este demonstrată.

Cu ajutorul soluţiei fundamentale a operatorului $P(D)$ putem da expresia unei soluţii a ecuaţiei (2). Are loc :

PROPOZIŢIA 2. *Fie $E \in K'(R^n)$ o soluţie fundamentală a operatorului $P(D)$ şi $f \in K'(R^n)$. Dacă produsul de convoluţie $E * f$ există, atunci expresia :*

$$X = E * f \tag{10}$$

reprezintă o soluţie a ecuaţiei (2) respectiv (3).

Într-adevăr, pe baza formulei de derivare a convoluţiei avem :

$$P(D)X = P(D)(E * f) = (P(D)E) * f = \delta * f = f.$$

Fie ecuaţia cu derivate parţiale cu coeficienţi constanţi :

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x, t) = 0, \tag{11}$$

unde P este un polinom în $n+1$ variabile şi de gradul m în raport cu variabila t, iar $u(x, t) = u_t(x)$ distribuţie din $K'(R^n)$, depinzînd de parametrul real t.

Scanned with OKEN Scanner

Soluția fundamentală corespunzătoare operatorului $P\left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial t}\right)$ este distribuția $E(x, t) \in K'(R^{n+1})$ care verifică relația :

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial t}\right) E(x, t) = \delta(x, t), \tag{12}$$

unde $\delta(x, t) \in K'(R^{n+1})$ reprezintă distribuția lui Dirac concentrată în origine.

DEFINIȚIA 2. Numim problemă Cauchy pentru ecuația (11), determinarea distribuției $u(x, t)=u_t(x) \in K'(R^n)$ care să fie soluție a ecuației (11) și să verifice condițiile inițiale :

$$u_t\Big|_{t=+0} = u_0(x), \frac{\partial}{\partial t} u_t\Big|_{t=+0} = u_1(x), \ldots, \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} u_t\Big|_{t=+0} = U_{m-1}(x), \tag{13}$$

unde $u_0, u_1, \ldots, u_{m+1} \in K'(R^n)$ sînt distribuții date.

În legătură cu rezolvarea acestei probleme, o deosebită importanță o prezintă noțiunea de soluție fundamentală a problemei Cauchy. Pentru aceasta vom introduce :

DEFINIȚIA 3. Distribuția $E_t(x) \in K'(R^n)$, depinzînd de parametrul real t, se numește soluție fundamentală a problemei Cauchy corespunzătoare ecuației (11) dacă pentru $t > 0$ este soluție a acestei ecuații și verifică condițiile inițiale :

$$E_t\Big|_{t=+0} = 0, \frac{\partial}{\partial t} E_t\Big|_{t=+0} = 0, \ldots, \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} E_t\Big|_{t=+0} = 0,$$
$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} E_t\Big|_{t=+0} = \delta(x). \tag{14}$$

PROPOZIȚIA 3. *Fie $E_t \in K'(R^n)$ soluția fundamentală a problemei Cauchy pentru ecuația* (11) *și distribuția $u_{m-1} \in K'(R^n)$.*

Dacă produsul de convoluție $E_t * u_{m-1}$ există, atunci distribuția :

$$u(x, t) = u_t(x) = E_t * u_{m-1}$$

reprezintă soluția problemei Cauchy corespunzătoare ecuației (11) *cu condițiile inițiale :*

$$u_t\Big|_{t=+0} = 0, \frac{\partial}{\partial t} u_t\Big|_{t=+0} = 0, \ldots, \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} u_t\Big|_{t=+0} = 0,$$
$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} u_t\Big|_{t=+0} = u_{m-1}(x). \tag{15}$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Avem :

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial t}\right)u_t = P\left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial t}\right)(E_t * u_{m-1}) = P\left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial t}\right)E_t * u_{m-1} = 0,$$

deci u_t este soluție a ecuației (11).

De asemenea, putem scrie :

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}u_t = \frac{\partial^k}{\partial t^k}(E_t * u_{m-1}) = \frac{\partial^k}{\partial t^k}E_t * u_{m-1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m-1.$$

Ținînd seama de definiția soluției fundamentale a problemei Cauchy rezultă că și condițiile inițiale (16) sînt satisfăcute.

La rezolvarea problemei Cauchy, frecvent se întîlnește operatorul diferențial liniar de forma :

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial^m}{\partial t^m} - L\left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial t}\right), \tag{16}$$

unde $L\left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial t}\right)$ este un operator diferențial liniar cu coeficienți constanți și de ordin maxim $m-2$ în raport cu t.

Pentru acest operator putem da sub formă explicită soluția problemei Cauchy corespunzătoare ecuației (11) și cu condițiile inițiale generale (13).

PROPOZIȚIA 4. *Fie $E_t \in K'(R^n)$ soluția fundamentală a problemei Cauchy corespunzătoare ecuației* (11) *și operatorului* (16). *Dacă E_t este convolubilă cu distribuțiile : $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1} \in K'(R^n)$, atunci soluția ecuației* (11) *cu condițiile inițiale* (13) *este dată de distribuția :*

$$u_t = E_t * u_{m-1} + \frac{\partial}{\partial t}E_t * u_{m-2} + \ldots + \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}E_t * u_0. \tag{17}$$

Demonstrație. Conform ipotezei, deoarece $E_t * u_{m-2}$ există, vom arăta că distribuția :

$$u_t^1 = \frac{\partial}{\partial t}(E_t * u_{m-2}) = \frac{\partial}{\partial t}E_t * u_{m-2} \tag{18}$$

este soluția problemei Cauchy corespunzătoare ecuației (11) cu condițiile inițiale :

$$u_t^1\Big|_{t=+0} = 0, \ \frac{\partial}{\partial t}u_t^1\Big|_{t=+0} = 0, \ldots, \frac{\partial^{m-3}}{\partial t^{m-3}}u_t^1\Big|_{t=+0} = 0,$$

$$\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}u_t^1\Big|_{t=+0} = u_{m-2}, \ \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}u_t^1\Big|_{t=+0} = 0. \tag{19}$$

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, deoarece avem :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x};\ \frac{\partial}{\partial t}\right)u_t\right] = P\left(\frac{\partial}{\partial x};\ \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_t}{\partial t}\right) = 0,$$

rezultă că u_t^1 dat de (18) este soluție a ecuației (11).

În ce privește condițiile inițiale (19) observăm că :

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}u_t^1 = \frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}}E_t * u_{m-2};\ k = 0, 1, 2, \ldots, m-1. \tag{20}$$

Ținînd seamă de condițiile (14) și de relația precedentă deducem că sînt satisfăcute condițiile inițiale (19), cu excepția ultimei condiții.

Pentru a arăta că $\left.\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}u_t^1\right|_{t=+0} = 0$, din ecuația (11) avem :

$$\frac{\partial^m E_t}{\partial t^m} = L\left(\frac{\partial}{\partial x};\ \frac{\partial}{\partial t}\right)E_t.$$

Cum $L\left(\frac{\partial}{\partial x};\ \frac{\partial}{\partial t}\right)$ este operator liniar de ordinul $m-2$ în raport cu t, rezultă că pentru $t \to +0$ avem :

$$\left.\frac{\partial^m}{\partial t^m}E_t\right|_{t=+0} = L\left(\frac{\partial}{\partial x};\ \frac{\partial}{\partial t}\right)\left.E_t\right|_{t=+0} = 0.$$

Cu aceasta, pe baza relației (20), obținem :

$$\left.\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}u_t^1\right|_{t=+0} = 0,$$

deci condițiile inițiale (19) sînt în întregime satisfăcute de soluția $u_t^1 = E_t * u_{m-2}$. Considerăm acum distribuția :

$$\bar{u}_t = E_t * u_{m-1} + u_t^1 = E_t * u_{m-1} + \frac{\partial}{\partial t}E_t * u_{m-2}. \tag{21}$$

Evident, $\bar{u}_t$ este soluție a ecuației (11) și verifică următoarele condiții inițiale :

$$\left.\bar{u}_t\right|_{t=+0} = 0,\ \left.\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}_t\right|_{t=+0} = 0, \ldots,\ \left.\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}\bar{u}_t\right|_{t=+0} = u_{m-2},$$

$$\left.\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\bar{u}_t\right|_{t=+0} = u_{m-1}.$$

În baza acestui rezultat deducem că soluția problemei Cauchy corespunzătoare ecuației (11) cu condițiile (13) este dată de relația (17). Cu aceasta propoziția este demonstrată.

Scanned with OKEN Scanner

În legătură cu cele două tipuri de soluţii fundamentale, vom arăta că pentru o largă clasă de ecuaţii cu derivate parţiale cu coeficienţi constanţi, între aceste soluţii fundamentale există o strînsă dependenţă.

Cunoaşterea acestei dependenţe permite reducerea rezolvării problemei Cauchy la determinarea soluţiei fundamentale, fapt ce în multe cazuri se realizează mai uşor. Vom pune în evidenţă în continuare o astfel de legătură :

Fie ecuaţia :

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\,;\,\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,\,t)=0, \tag{22}$$

unde P este un polinom în $n+1$ variabile de gradul m în raport cu t, avînd forma :

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\,;\,\frac{\partial}{\partial t}\right)=\frac{\partial^m}{\partial t^m}-L\left(\frac{\partial}{\partial x}\,;\,\frac{\partial}{\partial t}\right), \tag{23}$$

iar $L\left(\frac{\partial}{\partial x}\,;\,\frac{\partial}{\partial t}\right)$ polinom în $n+1$ variabile de gradul maxim $m-1$ în raport cu t.

PROPOZIŢIA 5. *Fie $E_t(t)\in S'(R^n)$ soluţia fundamentală a problemei Cauchy pentru ecuaţia* (22). *Atunci există o soluţie fundamentală $E(x,\,t)\in S'(R^{n+1})$ a operatorului* (23) *de forma* :

$$E(x,\,t)=\begin{cases}0, & t<0\\ E_t(x), & t\geqslant 0\end{cases}=\theta(t)\,E_t(x). \tag{24}$$

Demonstraţie. Conform definiţiilor soluţiilor fundamentale E_t şi $E(x,\,t)$ putem scrie :

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\,;\,\frac{\partial}{\partial t}\right)E_t=0 \qquad (t>0) \tag{25}$$

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}E_t\Big|_{t=+0}=0\ (k=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,m-2),\ \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}E_t\Big|_{t=+0}=\delta(x) \tag{26}$$

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\,;\,\frac{\partial}{\partial t}\right)E(x,\,t)=\delta(x,\,t). \tag{27}$$

Aplicînd ecuaţiei (27) transformata Fourier în raport cu variabilele $x,\,t$ şi notînd cu $\alpha,\,p$ noile variabile, obţinem ecuaţia :

$$P(-\mathrm{i}\alpha,\,-\mathrm{i}p)\hat{E}(\alpha,\,p)=[(-\mathrm{i}p)^m-L(-\mathrm{i}\alpha,\,-\mathrm{i}p)]\hat{E}(\alpha,\,p)=1. \tag{28}$$

Dacă vom arăta că distribuţia $E(x,\,t)$ dată de (24) satisface această ecuaţie, atunci propoziţia va fi demonstrată.

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd transformata Fourier în raport cu x ecuației (25) și condițiilor (26), obținem :

$$\left[\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} - L\left(-\mathrm{i}\alpha, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\right]\hat{E}_t(\alpha) = 0 \quad (t>0) \tag{25'}$$

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\hat{E}_t(\alpha)\Big|_{t=+0} = 0 \ (k = 0, 1, 2, \ldots, m-2) \tag{26'}$$

$$\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}t^{m-1}}\hat{E}_t(\alpha)\Big|_{t=+0} = \hat{\delta} = 1.$$

Ecuația (25') și condițiile (26') ne arată că $\hat{E}_t(\alpha)$ este soluție a ecuației diferențiale ordinare :

$$\left[\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} - L\left(-\mathrm{i}\alpha, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\right]V(\alpha, t) = 0 \tag{29}$$

și satisface condițiile inițiale (26'). Conform propoziției 1 din IV.2.2. rezultă că distribuția :

$$\mathscr{E}(\alpha, t) = \theta(t)\,\hat{E}_t(\alpha) \in S'(R^{n+1}) \tag{30}$$

reprezintă soluția fundamentală pentru operatorul :

$$D = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} - L\left(-\mathrm{i}\alpha, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right). \tag{31}$$

În consecință, are loc relația :

$$\left[\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} - L\left(-\mathrm{i}\alpha, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\right]\mathscr{E}(\alpha, t) = \delta(t). \tag{32}$$

Aplicînd acestei ecuații transformata Fourier în raport cu variabila t, obținem :

$$[(-\mathrm{i}p)^m - L(-\mathrm{i}\alpha, -\mathrm{i}p)]\,\hat{\mathscr{E}}(\alpha, p) = 1,$$

care, comparată cu (28) și ținînd seama de (30), ne permite să scriem :

$$\mathscr{E}(x, t) = \theta(t)\,E_t(x)$$

și cu aceasta propoziția este demonstrată.

Observație. Soluția fundamentală $E_t \in S'(R^n)$ reprezintă o distribuție depinzînd de parametrul real $t(t \geqslant 0)$.

Prin formula (24) am efectuat o prelungire a distribuției E_t cu valori nule pentru $t<0$.

Scanned with OKEN Scanner

În acest fel distribuția $E(x, t)$ dată de (24) este o distribuție din $S'(R^n)$, depinzînd de parametrul $t \in R$.

Ea va reprezenta o distribuție din $S'(R^{n+1})$ dacă o definim prin formula

$$(E(x, t), \varphi(x, t)) = \int_0^\infty (E_t(x), \varphi(x, t))\, dt, \quad \underset{\varphi \in S(R^{n+1})}{\forall} . \tag{33}$$

Într-adevăr, expresia $(E_t, \varphi(x, t))$, pentru t fixat, este o funcție din $S(R)$, deci $(E_t, \varphi(x, t)) \in L^1(R)$. În consecință, formula (33) definește o distribuție din $S'(R^{n+1})$ ceea ce justifică enunțul propoziției precum și demonstrația ei.

Uneori este util să se determine soluția fundamentală a problemei Cauchy cunoscîndu-se o soluție fundamentală a ecuației respective. În acest sens avem :

PROPOZIȚIA 6. *Fie $E(x, t) \in S'(R^{n+1})$ o soluție fundamentală a operatorului* (23). *Dacă $E(x, t)$ este de forma* (24), *unde $E_t \in S'(R^n)$, t fiind parametru și satisface condițiile:*

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} E \Big|_{t=+0} = 0 \ (k = 0, 1, 2, \ldots, m-2), \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} E \Big|_{t=+0} = \delta(x), \tag{34}$$

atunci distribuția E_t reprezintă soluția fundamentală a problemei Cauchy pentru ecuația (22).

Demonstrație. Aplicînd transformata Fourier în raport cu x expresiei (24) și condițiilor (34), obținem :

$$\hat{E}(\alpha, t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \hat{E}_t(\alpha), & t \geqslant 0 \end{cases},$$

$$\frac{d^k}{dt^k} \hat{E}(\alpha, t) \Big|_{t=+0} = 0 \ (k = 0, 1, 2, \ldots, m-2) \tag{34'}$$

$$\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \hat{E}(\alpha, t) \Big|_{t=+0} = 1.$$

Observăm că ultimele două relații exprimă salturile în origine ale distribuției $\hat{E}(\alpha, t)$ și a derivatelor acestuia în raport cu t pînă la ordinul $m-1$ inclusiv.

În consecință, avem :

$$\frac{d^k}{dt^k} \hat{E}(\alpha, t) = \frac{\tilde{d}^k}{dt^k} \hat{E}(\alpha, t) \ (k = 1, 2, \ldots, m-1) \tag{35}$$

$$\frac{d^m}{dt^m} \hat{E}(\alpha, t) = \frac{\tilde{d}^m}{dt^m} \hat{E}(\alpha, t) + \delta(t).$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seama că soluţia fundamentală $E(x, t)$ satisface ecuaţia (27), prin aplicarea transformatei Fourier în raport cu x obţinem :

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\hat{E}(\alpha, t) - L\left(-\mathrm{i}\alpha, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\hat{E}(\alpha, t) = \delta(t) \tag{36}$$

deoarece

$\delta(x, t) = \delta(x) \times \delta(t)$, deci $F_x[\delta(x, t)] = F[\delta(x)] \times \delta(t) = 1(\xi) \times \delta(t) = \delta(t)$.

Remarcăm că în ecuaţia (36) derivatele în raport cu t se consideră în sensul distribuţiilor. În baza relaţiilor (35) ecuaţia (36) se va scrie :

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}^m}{\mathrm{d}t^m}\hat{E}(\alpha, t) - L\left(-\mathrm{i}\alpha, \frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\right)\hat{E}(\alpha, t) = 0, \tag{36'}$$

unde $\dfrac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}$ reprezintă derivata în sens obişnuit. Pentru $t > 0$, deoarece $\hat{E}(\alpha, t) = E_t(\alpha)$, ecuaţia (36′) devine :

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}^m}{\mathrm{d}t^m}\hat{E}_t(\alpha, t) - L\left(-\mathrm{i}\alpha, \frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\right)\hat{E}_t(\alpha) = 0. \tag{37}$$

Din (34′) obţinem :

$$\left.\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\hat{E}_t(\alpha)\right|_{t=+0} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m-2),$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}t^{m-1}}\hat{E}_t(\alpha)\right|_{t=+0} = 1. \tag{38}$$

Ecuaţia (37) împreună cu condiţiile (38) sînt echivalente cu relaţiile (25), (26) fapt care arată că distribuţia $E_t(x) \in S'(R^n)$ reprezintă soluţia fundamentală a problemei Cauchy pentru ecuaţia (22).

§ 4. Soluţia fundamentală şi problema Cauchy pentru ecuaţia undelor, ecuaţia telegrafiştilor pentru linii fără distorsiuni şi ecuaţia căldurii

1. Ecuaţia undelor

În studiul diferitelor fenomene fizice ca : propagarea sunetului, propagarea undelor electromagnetice, vibraţiile coardelor şi membranelor, se întîlneşte ecuaţia de tip hiperbolic :

$$\Box_a u = 0 \qquad 1)$$

numită ecuaţia undelor din R^n, unde $u(x, t)=u_t(x)$ este distribuţie din $K'(R^n)$, depinzînd de parametrul $t\geqslant 0$, iar $\square_a = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta$ operatorul lui D'Alembert.

Pentru $n=1, 2, 3$ obţinem, respectiv, ecuaţia coardei vibrante, ecuaţia undelor cilindrice şi ecuaţia undelor sferice.

Fie $E(x, t)\in S'(R^{n+1})$ soluţia fundamentală corespunzătoare operatorului lui D'Alembert $\square_a$. Atunci avem :

$$\square_a E(x, t) = \delta(x, t). \tag{2}$$

Aplicînd transformata Fourier în raport cu variabila x obţinem ecuaţia diferenţială :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\hat{E}(\xi, t) + a^2\|\xi\|^2\hat{E}(\xi, t) = \delta(t). \tag{3}$$

Soluţia fundamentală a acestei ecuaţii conform exemplului 3 din IV.2.2. este distribuţia :

$$\hat{E}(\xi, t) = \theta(t)\frac{\sin a\|\xi\|t}{a\|\xi\|}. \tag{4}$$

În consecinţă, pentru soluţia fundamentală a ecuaţiei undelor, respectiv operatorului lui D'Alembert, obţinem expresia :

$$E(x, t) = \theta(t)F_{\xi}^{-1}\left[\frac{\sin a\|\xi\|t}{a\|\xi\|}\right] \in S'(R^{n+1}). \tag{5}$$

Pentru calculul transformatei Fourier inverse, corespunzătoare spaţiilor cu $2m+3$ ($m\in N_0$) dimensiuni, un rol deosebit îl joacă distribuţia lui Dirac concentrată pe o sferă de rază R şi cu centrul în origine. În acest scop introducem :

DEFINIŢIA 1. Fie S o suprafaţă netedă pe porţiuni. Numim distribuţia lui Dirac $\delta(S)$ concentrată pe suprafaţa S, distribuţia dată prin integrala de suprafaţă :

$$(\delta(S), \varphi) = \int_S \varphi(x)\,\mathrm{d}S, \quad \underset{\varphi\in K(R^n)}{\forall} \tag{6}$$

Evident că supp $\delta(S)=S$ deoarece, dacă $x\notin S$, atunci $\delta(S)=0$. În general dacă f este o funcţie continuă pe porţiuni, dată pe suprafaţa S, avem :

$$(f\delta(S), \varphi) = \int_S f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}S, \quad \underset{\varphi\in K(R^n)}{\forall}. \tag{7}$$

În particular, dacă $S=S_R$ este o sferă de rază R cu centrul în origine, obţinem :

$$(\delta(S_R), \varphi) = \int_{S_R} \varphi(x)\,\mathrm{d}S, \quad \underset{\varphi\in K(R^n)}{\forall}. \tag{6'}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece supp $\delta(S_R)=S_R$, rezultă că $\delta(S_R)$ este o distribuție cu suport compact.

PROPOZIȚIA 1. *Fie S o suprafață mărginită, netedă pe porțiuni. Dacă g și f sînt funcții continue pe porțiuni, respectiv în R^n și pe S, atunci are loc formula:*

$$g * f\delta(S) = \int_S f(y)\, g(x-y)\, dS_y. \tag{8}$$

Într-adevăr, deoarece supp $f\delta(S) \subset S$, rezultă că distribuția $f\delta(S)$ este cu suport compact, deci produsul de convoluție (8) există.

În consecință, $\forall\ h,\ \varphi \in K(R^n)$ cu supp $h \supset S$ și $h=1$ pe S, putem scrie:

$$(g * f\delta(S),\ \varphi) = (f(y)\delta(S)_y,\ h(y)\,(g(z),\ \varphi(y+z))) =$$

$$= \int_S f(y)\, h(y) \left[\int_{R^n} g(z)\, \varphi(y+z)\, dz \right] dS_y =$$

$$= \int_S f(y)\, h(y) \left[\int_{R^n} g(x-y)\, \varphi(x)\, dx \right] dS_y =$$

$$= \int_{R^n} \varphi(x) \left[\int_S f(y)\, g(x-y)\, dS_y \right] dx = \left(\int_S f(y)\, g(x-y) dS_y,\ \varphi \right),$$

de unde rezultă formula (8).

În baza formulei de calcul a transformatei Fourier pentru distribuțiile cu suport compact, avem:

$$F[\delta(S_R)] = \left(\delta(S_R),\ e^{i(x,\,\xi)} \right) = \int_{S_R} e^{i(x,\,\xi)}\, dS. \tag{9}$$

Notînd cu θ unghiul format de vectorul $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S_R$ cu axa Ox_n, pentru elementul diferențial dS de arie al sferei S_R, vom obține expresia:

$$dS = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} (R \sin\theta)^{n-2} R\, d\theta, \quad n \geqslant 2. \tag{10}$$

Deoarece axa ox_n este arbitrară, o vom alege astfel încît să coincidă în direcție și sens cu vectorul $\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in R^n$, fapt pentru care $(x, \xi) = R\|\xi\| \cos\theta$ și formula (9) devine:

$$F[\delta(S_R)] = \frac{2R^{n-1}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^{\pi} e^{iR\|\xi\|\cos\theta} \sin^{n-2}\theta\, d\theta. \tag{11}$$

Scanned with OKEN Scanner

Această formulă permite determinarea soluției fundamentale $E(x, t)$ dată de expresia (5) pentru spațiile de dimensiune $n=2m+3$ $(m \in N_0)$.

Astfel, pentru $n=3$, deoarece $\Gamma(1)=1$, obținem :

$$F[\delta(S_R)] = 4\pi R \frac{\sin R\|\xi\|}{\|\xi\|}. \tag{12}$$

Prin compararea formulelor (5) și (12) găsim pentru soluția fundamentală corespunzătoare ecuației undelor din R^3 expresia :

$$E(x, t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\,\delta(S_{at}) \in S'(R^4). \tag{13}$$

În baza formulei (33) din IV.3. această distribuție acționează asupra unei funcții $\varphi \in S(R^4)$ după formula :

$$(E(x, t),\ \varphi(x)) = \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^\infty (\delta(S_{at}),\ \varphi)\frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^\infty \frac{1}{t}\left(\int_{S_R}\varphi(x)\,dS\right)dt. \tag{14}$$

Să determinăm acum proprietățile distribuției (13). Evident că soluția fundamentală $E(x, t)$ dată de (13) este o distribuție depinzînd de parametrul real t.

Pentru $\underset{\varphi \in S(R^3)}{\forall}$ putem scrie :

$$(E(x, t), \varphi(x)) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}(\delta(S_{at}),\ \varphi(x)) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\int_{S_{at}}\varphi(x)\,dS. \tag{15}$$

Efectuînd substituția $x=atx'$; $x, x' \in R^3$ și notînd cu dS_1 elementul de arie al sferei unitate S_1, cu centrul în origine, obținem : $dS=at^2dS_1, (t>0)$.

Cu aceasta expresia (15) devine :

$$(E(x, t),\ \varphi(x)) = \frac{t\theta(t)}{4\pi}\int_{S_1}\varphi(atx')\,dS_1, \quad x' \in S_1. \tag{16}$$

Pentru $t \to +0$ obținem :

$$E(x, t)|_{t=+0} = 0. \tag{17}$$

Analog, dacă $t>0$, atunci :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}E(x, t),\ \varphi(x)\right) = \frac{1}{4\pi}\int_{S_1}\varphi(atx')\,dS_1 + \frac{t}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_{S_1}\varphi(atx')\,dS_1$$

și în consecință pentru $t \to +0$ avem :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}E(x, t),\ \varphi(x)\right)\Big|_{t=+0} = (\delta(x),\ \varphi(x)).$$

Deci

$$\frac{\partial}{\partial t}E(x, t)\Big|_{t=+0} = \delta(x). \tag{18}$$

Scanned with OKEN Scanner

Avînd în vedere expresia (13) a soluției fundamentale $E(x, t)$ precum și proprietățile sale (17) și (18), conform propoziției 6 din IV.3., rezultă că soluția fundamentală a problemei Cauchy pentru ecuația undelor (1) din R^3 este distribuția $E_t(x) \in S'(R^3)$ anume :

$$E_t(x) = \frac{\delta(S_{at})}{4\pi a^2 t}, \quad t > 0. \tag{19}$$

În baza propoziției 4 din IV.3. deducem că soluția problemei Cauchy pentru ecuația undelor (1) cu condițiile inițiale :

$$u_t(x)\Big|_{t=+0} = u_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u_t(x)\Big|_{t=+0} = u_1(x);$$

$$u_0, u_1 \in K'(R^3)$$

este distribuția :

$$u_t(x) = E_t * u_1 + \frac{\partial}{\partial t} E_t * u_0, \tag{20}$$

unde distribuțiile u_0 și u_1 se presupun cu suport compact. În particular, dacă $u_0(x)$ și $u_1(x)$ sînt distribuții de tip funcție cu suport compact, generat de funcții continue pe porțiuni, atunci în baza formulei (8) soluția problemei Cauchy (20) se poate scrie sub forma :

$$u_t(x) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{||y||=at} u_1(x-y)\, dS_y + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{t} \int_{||y||=at} u_0(x-y)\, dS_y \tag{21}$$

sau efectuînd schimbarea de variabilă $x - y = \xi$,

$$u_t(x) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{||x-\xi||=at} \frac{u_1(\xi)\, dS}{t} + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{||x-\xi||=at} \frac{u_0(\xi)}{t} dS. \tag{21'}$$

Se poate arăta, ținînd seama de (5) că pentru $n=1$ soluția fundamentală corespunzătoare coardei vibrante este distribuția $E(x, t) \in S'(R^2)$ dată de expresia :

$$E(x, t) = \frac{1}{2a}\, \theta(at - |x|) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \dfrac{1}{2a}, & at \geqslant |x| \geqslant 0 \\ 0, & |x| > at \geqslant 0. \end{cases} \tag{22}$$

Astfel pentru $\varphi \in K(R)$ și $t > 0$ obținem :

$$(E(x, t),\ \varphi(x)) = \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \varphi(x)\, dx = \frac{t}{2} \int_{-1}^{1} \varphi(atu)\, du$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial t},\ \varphi\right) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \varphi(atu)\, du + \frac{ta}{2} \int_{-1}^{1} u\varphi'(atu)\, du.$$

Pentru $t \to +0$ avem :

$$E(x, t)\Big|_{t=+0} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial t} E(x, t)\Big|_{t=+0} = \delta(x).$$

Scanned with OKEN Scanner

Conform propoziției 6 din IV.3., deducem că soluția fundamentală a problemei Cauchy pentru ecuația coardei vibrante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{23}$$

este distribuția :

$$E_t(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}, & |x| \leqslant at \\ & t > 0. \\ 0, & |x| > at \end{cases} \tag{24}$$

În consecință, dacă u_0, $u_1 \in \mathcal{E}'(R)$ sînt distribuții cu suport compact, atunci soluția problemei Cauchy cu condițiile inițiale :

$$u_t\Big|_{t=+0} = u_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u_t\Big|_{t=+0} = u_1(x) \tag{25}$$

este dată de distribuția :

$$u_t(x) = E_t * u_1 + \frac{\partial}{\partial t}(E_t * u_0). \tag{26}$$

Dacă u_0 și u_1 sînt distribuții de tip funcție, obținem formula lui D'Alembert :

$$u_t(x) = \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} u_1(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-at}^{at} u_0(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial t}\int_{x-at}^{x+at} u_0(y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{u_0(x+at) + u_0(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(y)\,\mathrm{d}y.$$

Pentru $n=2$ soluția fundamentală corespunzătoare ecuației undelor cilindrice este :

$$E(x, t) = \frac{\theta(at - \|x\|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2 - \|x\|^2}}, \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \tag{27}$$

iar soluția fundamentală a problemei Cauchy va fi ;

$$E_t(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi a\sqrt{a^2t^2 - \|x\|^2}}, & \|x\| < at \\ & t > 0 \\ 0, & \|x\| \geqslant at. \end{cases} \tag{28}$$

Într-adevăr, dacă $E(x, t) \in S'(R^3)$ este soluția fundamentală, atunci avem :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 E}{\partial^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial x_2^2}\right) = \delta(x_1, x_2, t).$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd transformata Fourier în raport cu variabilele x_1, x_2 și transformata Laplace în raport cu t, obținem :

$$\hat{E}(\alpha_1, \alpha_2, p) = \frac{1}{p^2 + a^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \tag{29}$$

deoarece $LF[\delta(x_1, x_2, t)] = 1$.
Dar

$$F\left[K_0\left(p\frac{r}{a}\right)\right] = \frac{2\pi}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dfrac{p^2}{a^2}}, \tag{30}$$

unde K_0 reprezintă funcția lui Bessel modificată de speța a doua și de ordinul zero, Re $p > 0$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. În baza acestei relații din (29) găsim :

$$E(x, t) = \frac{1}{2\pi a^2} L^{-1}\left[K_0\left(p\frac{r}{a}\right)\right] = \frac{1}{2\pi a^2} \cdot a \frac{\theta(t)\ \theta(at - r)}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}} =$$

$$= \frac{\theta(t)}{2\pi a} \frac{\theta(at - \|x\|)}{\sqrt{a^2t^2 - \|x\|^2}}$$

adică formula (27).
Remarcăm că pentru formulele (30) și (31) s-au utilizat ([4], p. 23, 59, 245).

Într-adevăr, deoarece $F_y[e^{-\gamma|y|}] = \dfrac{2\gamma}{\gamma^2 + \alpha_2^2}$, Re$\gamma > 0$, $e^{-\gamma|y|}$ fiind funcție pară, atunci, considerînd

$$\gamma = \sqrt{\alpha_1^2 + k^2p^2}, \qquad \text{obținem :}$$

$$F_y\left[\frac{e^{-|y|\sqrt{\alpha_1^2 + k^2p^2}}}{\sqrt{\alpha_1^2 + k^2p^2}}\right] = \frac{2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + k^2p^2}.$$

Dar cum funcția Bessel $K_0(kpr)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ este o funcție pară, avem :

$$\frac{1}{\pi} F_x[K_0(kpr)] = \frac{e^{-|y|\sqrt{\alpha_1^2 + k^2p^2}}}{\sqrt{\alpha_1^2 + k^2p^2}}$$

deci

$$F_yF_x[K_0(kpr)] = F[K_0(kpr)] = \frac{2\pi}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + k^2p^2} \quad \text{Re}p > 0$$

adică

$$F\left[K_0\left(p\frac{r}{a}\right)\right] = \frac{2\pi}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dfrac{p^2}{a^2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a arăta că distribuţia (28) reprezintă soluţia fundamentală a problemei Cauchy, observăm că pentru $t>0$ şi $\forall_{\varphi\in K(R^2)}$ avem relaţiile :

$$(E(x,t),\ \varphi(x)) = \int_{\|x\|<at} \frac{\varphi(x)\,dx}{2\pi a\sqrt{1-\|x\|^2}} = \frac{t}{2\pi}\int_{\|u\|<1} \frac{\varphi(atu)}{\sqrt{1-\|u\|^2}}\,du$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}E(x,t),\ \varphi(x)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\|u\|<1}\frac{\varphi(atu)}{\sqrt{1-\|u\|^2}}\,du + \frac{t}{2\pi}\frac{d}{dt}\int_{\|u\|<1}\frac{\varphi(atu)}{\sqrt{1-\|u\|^2}}\,du.$$

Dacă $t\to+0$, obţinem :

$$(E(x,t),\ \varphi(x))\to 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}E(x,t),\ \varphi(x)\right)\to\frac{\varphi(0)}{2\pi}\int_{\|u\|<1}\frac{du}{\sqrt{1-\|u\|^2}} = \varphi(0) = (\delta(x),\ \varphi(x))$$

În consecinţă, avem :

$$E(x,t)\Big|_{t=+0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}E(x,t)\Big|_{t=+0} = \delta(x)$$

şi conform propoziţiei 6 din IV.3. rezultă că distribuţia (28) reprezintă soluţia fundamentală a problemei Cauchy corespunzătoare ecuaţiei undelor cilindrice :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = 0.$$

2. Ecuaţia telegrafiştilor pentru linii fără distorsiuni

Să considerăm o linie de transmisie electrică cu parametrii distribuiţi R, L, C, G, reprezentînd rezistenţa, inductanţa, capacitatea şi perditanţa raportate la unitatea de lungime. Atunci intensitatea curentului $i(x,t)$, tensiunea $u(x,t)$ şi parametrii distribuiţi satisfac sistemul de ecuaţii ale telegrafiştilor :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + L\frac{\partial i}{\partial t} + Ri &= 0\\ \frac{\partial i}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial t} + Gu &= 0.\end{aligned} \tag{1}$$

Prin eliminarea lui $u(x,t)$ între aceste ecuaţii şi considerînd $RC = LG$, vom obţine ecuaţia telegrafiştilor pentru liniile fără distorsiuni :

$$CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + 2RC\frac{\partial i}{\partial t} + RGi - \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = 0. \tag{2}$$

unde parametrii distribuiţi se consideră nenegativi.

Ecuaţia (2) este o ecuaţie de tip hiperbolic pentru care condiţiile iniţiale sînt :

$$i(x,t)\Big|_{t=+0} = i_0(x), \quad u(x,t)\Big|_{t=+0} = u_0(x). \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seama de (1) vom obţine pentru ecuaţia telegrafiştilor (2) următoarele condiţii iniţiale :

$$i(x,t)\Big|_{t=+0} = i_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} i(x,t)\Big|_{t=+0} = -\frac{R}{L} i_0(x) - \frac{1}{L}\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}. \tag{4}$$

Pentru rezolvarea problemei Cauchy vom determina soluţia fundamentală $E(x,t) \in \mathcal{S}'(R^2)$ corespunzătoare ecuaţiei (2). Avem astfel ecuaţia :

$$CL\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + 2CR\frac{\partial E}{\partial t} + RGE(x,t) - \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \delta(x,t). \tag{5}$$

Aplicînd transformatele Fourier şi Laplace, respectiv în raport cu x şi t, obţinem :

$$\tilde{E}(\alpha,p) = \frac{1}{\alpha\sqrt{CL}} \cdot \frac{\frac{\alpha}{\sqrt{CL}}}{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{CL}}\right)^2 + \left(p + \frac{R}{L}\right)^2}. \tag{6}$$

Deoarece au loc relaţiile :

$$L[\theta(t)\sin\beta t] = \frac{\beta}{p^2+\beta^2}, \qquad F[\theta(b-|x|)] = \frac{2\sin b\alpha}{\alpha}; \quad (b>0)$$

$$L[e^{-\frac{R}{L}t}\theta(t)\sin\beta t] = \frac{\beta}{p^2 + \left(p+\frac{R}{L}\right)^2}$$

prin aplicarea transformatelor inverse Laplace şi Fourier obţinem succesiv :

$$\tilde{E}(\alpha,t) \equiv L^{-1}[\tilde{E}(\alpha,p)] = \frac{1}{\sqrt{CL}}\theta(t)\,e^{-\frac{R}{L}t}\,\frac{1}{\alpha}\sin\frac{\alpha t}{\sqrt{CL}} \tag{7}$$

$$E(x,t) = F^{-1}[\tilde{E}(\alpha,t)] = \frac{1}{2\sqrt{CL}}\theta(t)\,e^{-\frac{R}{L}t}\,\theta(t-|x|\sqrt{CL}), \tag{8}$$

Ţinînd seama de exemplele 3 şi 4 din II.2.4 şi de propoziţia 6 din IV.3., rezultă că distribuţia :

$$E_t(x) = \frac{\sqrt{CL}}{2}\,e^{-\frac{R}{L}t}\,\theta(t-|x|\sqrt{CL}), \quad t\geqslant 0 \tag{9}$$

reprezintă soluţia problemei Cauchy pentru ecuaţia (2) considerată în spaţiul distribuţiilor.

Astfel, între distribuţiile $E(x,t)$ şi $E_t(x)$ există relaţia :

$$E(x,t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \dfrac{E_t}{CL}, & t\geqslant 0 \end{cases} \tag{10}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar distribuţia $E_t(x) \in S'(R)$ posedă proprietăţile :

$$E_t(x)\Big|_{t=+0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} E_t\Big|_{t=+0} = \delta(x), \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_t(x)\Big|_{t=+0} = -2\frac{R}{L}\delta(x). \qquad (11)$$

Aşa cum s-a arătat în exemplul 4 din II.2.4. formula (21), soluţia problemei Cauchy corespunzătoare ecuaţiei (2) şi condiţiilor iniţiale (4) este dată de distribuţia $i(x, t) \in K'(R)$, depinzînd de parametrul $t>0$ şi anume :

$$i(x, t) = i_t(x) = E_t(x) * \left[-\frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial x} u_0(x) + \frac{R}{L} i_0(x) \right] + \frac{\partial}{\partial t} E_t * i_0(x),$$

unde u_0, i_0 sînt distribuţii cu suport compact, deci $u_0, i_0 \in \mathcal{E}'(R)$.

3. Ecuaţia căldurii

Studiul fenomenelor de conductibilitate termică şi difuzie conduc la ecuaţia de tip parabolic :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \triangle u = 0 \qquad (1)$$

numită ecuaţia căldurii în R^n.

Problema Cauchy pentru ecuaţia (1) constă în determinarea distribuţiei $u(x, t) = u_t(x) \in K'(R^n)$, depinzînd de parametrul real t, care să fie soluţie a ecuaţiei (1) şi să verifice condiţia iniţială

$$u_t(x)\,|_{t=+0} = u_0(x), \quad u_0 \in K'(R^n). \qquad (2)$$

Fie $E(x, t) \in S'(R^{n+1})$ soluţia fundamentală a operatorului $\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta$ de propagare a căldurii.

Soluţia fundamentală $E(x, t)$ satisface ecuaţia :

$$\frac{\partial E}{\partial t} - a^2 \triangle E = \delta(x, t) = \delta(x) \times \delta(t). \qquad (3)$$

Aplicînd acestei ecuaţii transformata Fourier în raport cu variabila x obţinem :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \hat{E}(\xi, t) + a^2 \| \xi \|^2 \hat{E}(\xi, t) = 1(\xi) \times \delta(t) = \delta(t). \qquad (4)$$

În baza exemplului 1 din IV.2.2. soluţia fundamentală a acestei ecuaţii diferenţiale este distribuţia de tip funcţie :

$$\hat{E}(\xi, t) = \theta(t) e^{-a^2 \|\xi\|^2 t} \in S'(R^{n+1}). \qquad (5)$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seama de formula 6 din III.1.1. avem pentru soluţia fundamentală expresia :

$$E(x, t) = F^{-1}[\hat{E}(\xi, t)] = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{||x||^2}{4a^2t}}, \tag{6}$$

adică

$$E(x, t) = \begin{cases} 0 & , \ t < 0 \\ \dfrac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{||x||^2}{4a^2t}} & , \ t > 0. \end{cases} \tag{6'}$$

Observăm că $E(x, t) \in C^\infty$ pentru $t > 0$ şi avem :

$$\int_{R^n} E(x, t)\, dx = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u_i^2} du_i = 1. \tag{7}$$

Să arătăm că soluţia fundamentală a problemei Cauchy corespunzătoare ecuaţiei căldurii (1) este distribuţia $E_t(x) \in S'(R^n)$, depinzînd de parametrul $t > 0$ şi anume :

$$E_t(x) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{||x||^2}{4a^2t}} \quad (t > 0). \tag{8}$$

Printr-un calcul direct se verifică faptul că distribuţia E_t este soluţie a ecuaţiei (1). În baza formulei (6) din III.1.1. avem :

$$F[E_t] = e^{-||\xi||^2}. \tag{9}$$

În consecinţă, pentru $t \to +0$ obţinem :

$$F[E_t]|_{t=+0} = 1,$$

adică $E_t|_{t=+0} = \delta(x)$ şi astfel distribuţia E_t dată de expresia (8) reprezintă soluţia fundamentală a problemei Cauchy.

Datorită faptului că distribuţia E_t converge în sensul distribuţiilor către $\delta(x)$, aceasta constituie un şir reprezentativ Dirac.

Cu ajutorul ei, soluţia problemei Cauchy corespunzătoare ecuaţiei (1) şi condiţiei iniţiale (8) va fi distribuţia :

$$u_t(x) = E_t * u_0(x), \tag{10}$$

unde $u_0 \in \mathcal{E}'(R^n)$.

În particular, dacă $u_0(x)$ este o funcţie mărginită din R^n atunci obţinem formula lui Poisson :

$$u_t(x) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{R^n} u_0(\xi) e^{-\frac{||x-\xi||^2}{4a^2t}} d\xi, \tag{10'}$$

care reprezintă soluţia mărginită a ecuaţiei căldurii (1) şi tinde pentru $t \to +0$ către $u_0(x)$ în toate punctele de continuitate ale acestei funcţii.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 5

Aplicații ale produsului de convoluție

§ 1. Aplicații în electrotehnică

1. Potențialul de volum și de suprafață al cîmpului electrostatic

În rezolvarea diferitelor probleme la limită din electrostatică o importanță deosebită o prezintă noțiunile de potențial de volum și de suprafață.

Fie q o sarcină electrică punctiformă situată în punctul $M_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Prin definiție potențialul cîmpului electrostatic creat de sarcina q este funcția $V : R^3 \setminus \{M_0\} \to R$ dată de formula:

$$V(x) = \frac{q}{R}, \quad R = \| x - \xi \|, \tag{1}$$

unde $M(x_1, x_2, x_3)$ reprezintă punctul generic al spațiului R^3 (fig. 11).

Observăm că funcția potențial V este o funcție local integrabilă și în consecință generează o distribuție de tip funcție.

Intensitatea cîmpului electrostatic creat de sarcina q este o funcție vectorială definită prin relația:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V. \tag{2}$$

Deoarece potențialul V este o distribuție de tip funcție, rezultă că intensitatea $\vec{E}$ a cîmpului electrostatic reprezintă o distribuție. În general notînd cu ρ densitatea volumică a unor sarcini electrice, exprimată printr-o distribuție și cu V potențialul cîmpului creat de aceste sarcini, atunci mărimile V și ρ considerate distribuții sînt legate prin ecuația lui Poisson:

$$\Delta V = -4\pi\rho, \tag{3}$$

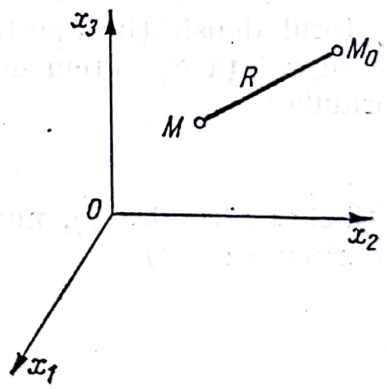

Fig. 11

unde Δ reprezintă operatorul lui Laplace în R^3.

Ecuațiile (2) și (3) considerate în spațiul distribuțiilor constituie ecuațiile fundamentale ale electrostaticii.

Astfel, ecuația lui Poisson permite determinarea potențialului cîmpului unor sarcini de volum prin cunoașterea repartiției în spațiu a acestor sarcini.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă densitatea volumică ρ a sarcinilor electrice se exprimă printr-o distribuţie cu suport compact, deci $\rho \in \mathscr{E}'(R^3)$, atunci prin definiţie distribuţia :

$$u = \rho * \frac{1}{r}, \quad r = \| x \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \tag{4}$$

se numeşte potenţialul de volum cu densitatea ρ.

În particular, dacă ρ este o funcţie integrabilă cu suport compact, formula (4) devine :

$$u(x) = \int_{R^3} \frac{\rho(\xi)}{\| x - \xi \|} \, d\xi. \tag{5}$$

Deoarece distribuţia $\mathscr{E} = -\frac{1}{4\pi r}$ reprezintă soluţia fundamentală a operatorului lui Laplace în R^3, potenţialul de volum (4) este o soluţie a ecuaţiei lui Poisson (3). Soluţia generală a acestei ecuaţii va fi distribuţia :

$$V = \rho * \frac{1}{r} + \psi, \tag{6}$$

unde ψ este o distribuţie armonică.

În continuare vom considera cîmpul creat de sarcini electrice repartizate pe o suprafaţă mărginită S, netedă pe porţiuni. (Strat electric simplu).

Fie σ densitatea superficială a stratului exprimată printr-o funcţie continuă pe porţiuni dată pe S.

Deoarece sarcina electrică este concentrată pe suprafaţa S, cu ajutorul densităţii superficiale σ şi a distribuţiei lui Dirac concentrată pe suprafaţa S, putem defini densitatea volumică a acestor sarcini prin formula :

$$\rho = \sigma \delta(S). \tag{7}$$

Utilizînd formula (4), numim potenţial de simplu strat de densitate σ, distribuţia :

$$u_1 = \frac{1}{r} * \sigma \delta(S). \tag{8}$$

Produsul de convoluţie există deoarece $\operatorname{supp} \sigma\delta(S) \subset S$, deci densitatea volumică $\sigma\delta(S)$ este o distribuţie cu suport compact. Evident distribuţia (8) este o soluţie particulară a ecuaţiei lui Poisson.

În baza formulei (8) din IV.4.1. potenţialul de simplu strat se poate scrie sub forma :

$$u_1(x) = \int_S \frac{\sigma(y)}{\| x - y \|} \, dS_y. \tag{8'}$$

Scanned with OKEN Scanner

Un alt tip de potențial de suprafață este potențialul de dublu strat. Fie S o suprafață mărginită, netedă pe porțiuni. În fiecare punct M al acestei suprafețe considerăm un segment h orientat după normala la suprafață și de aceeași parte a ei. Extremitățile M' ale segmentelor h determină o nouă suprafață S'.

Vom presupune că pe cele două suprafețe avem repartizate sarcini electrice de semn contrar avînd densitățile σ și $-\sigma'$ (σ, $\sigma' > 0$), respectiv în punctele corespondente M și M', și cu proprietatea $\sigma dS = \sigma' dS'$. Prin definiție, limita în sensul distribuțiilor a ansamblului de sarcini repartizate pe suprafețele S și S' cînd $h \to +0$, dacă expresia $\mu = h\sigma$ rămîne constantă, se numește strat electric dublu.

Mărimea $\mu = h\sigma$ se numește momentul stratului electric dublu. Notînd cu $\vec{n}$ versorul normalei la suprafața S orientat de la sarcina electrică negativă către sarcina electrică pozitivă, atunci densitatea volumică a sarcinilor stratului electric dublu este:

$$\rho = -\frac{\partial}{\partial n}\mu\delta(S), \tag{9}$$

unde $\frac{\partial}{\partial n}$ reprezintă derivata după normala $\vec{n}$ la suprafața S (fig. 12). În consecință, utilizînd formula (4), numim potențial de dublu strat, distribuția definită prin formula:

$$u_2 = -\frac{1}{r} * \frac{\partial}{\partial n}\mu\delta(S). \tag{10}$$

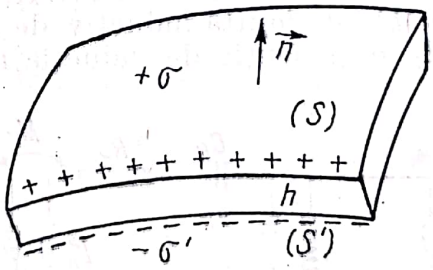

Fig. 12

Observăm că expresia (10) definește o distribuție din $K'(R^3)$ deoarece $\frac{\partial}{\partial n}\mu\delta(S) \in K'(R^3)$ și $\operatorname{supp}\frac{\partial}{\partial n}\mu\delta(S) \subset S$, deci $\frac{\partial}{\partial n}\mu\delta(S) \in \mathcal{E}'(R^3)$.

Explicitînd formula (10) obținem:

$$u_2(x) = \int_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{\|x-y\|}dS_y. \tag{11}$$

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, $\forall_{\varphi \in K(R^3)}$ în baza formulei (8) din IV.4.1. avem:

$$(u_2, \varphi) = -\left(\frac{\partial}{\partial n}\mu(y)\,\delta(S)_y,\ h(y)\left(\frac{1}{\|z\|},\ \varphi(y+z)\right)\right) =$$

$$= \int_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial n}\left[h(y)\int_{R^3}\frac{1}{\|z\|}\varphi(y+z)\,dz\right]dS_y =$$

$$= \int_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial n}\int_{R^3}\frac{1}{\|x-y\|}\varphi(x)\,dx\,dS_y = \int_{R^3}\varphi(x)\int_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{\|x-y\|}dS_y\,dx =$$

$$= \left(\int_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{\|x-y\|}dS_y,\ \varphi\right)$$

de unde rezultă formula (11).

2. Circuite cuplate inductiv

Între circuitele electrice liniare cu constante concentrate datorită aplicaţiilor lor, se disting circuitele cuplate inductiv. În cele ce urmează fvom studia cu ajutorul algebrei de convoluţie K'_+, un circuit electric format din n celule cuplate inductiv. Vom da soluţia problemei Cauchy în spaţiul distribuţiilor şi vom pune în evidenţă dependenţa între matricele admitanţă şi impedanţă a circuitului relativ la intensitate şi sarcină electrică.

Să considerăm un circuit format din n celule cuplate inductiv igura 13, supuse acţiunii unor tensiuni variabile $E_k(t)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$.

Fie (k) una din cele n celule. Vom nota cu L'_k, L''_k; C_k, R_k inductanţele, capacitatea şi rezistenţa acestei celule, iar cu q_k, i_k respectiv sarcina de pe plăcile condensatorului şi intensitatea curentului din celulă. Ţinînd seama că celula (k) este legată inductiv de celulele $(k-1)$ şi $(k+1)$, vom nota cu M_{k-1}, M_k coeficienţii de inducţie mutuali corespunzători.

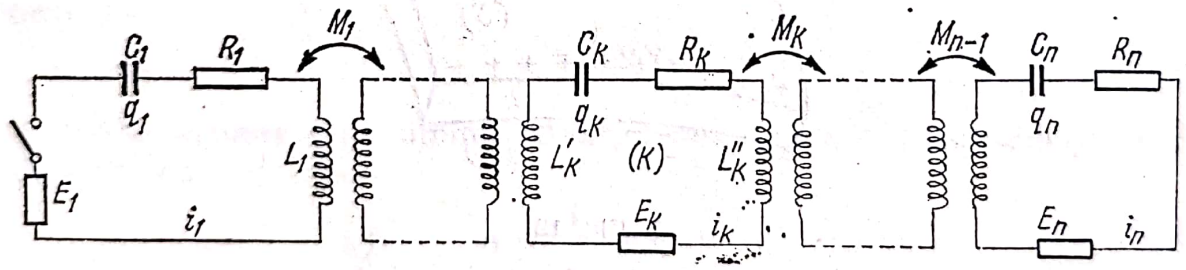

Fig. 13

Presupunînd cunoscute tensiunile şi parametrii celor n circuite legate inductiv şi considerînd ca necunoscute sarcinile q_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ de pe plăcile condensatorilor, ecuaţiile diferenţiale corespunzătoare necunoscutelor alese vor fi:

$$D_k q_k + M_{k-1}\frac{d^2}{dt^2}q_{k-1} + M_k\frac{d^2}{dt^2}q_{k+1} = E_k(t);\quad (t>0),\quad (k=1, 2, \ldots, n) \quad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde D_k reprezintă operatori diferenţiali, avînd expresiile :

$$D_k = L_k \frac{d^2}{dt^2} + R_k \frac{d}{dt} + \frac{1}{C_k} \tag{2}$$

şi

$$L_k = L_k' + L_k''; \quad L_1' = L_n'' = 0; \quad M_0 = M_n = 0; \quad q_0 = q_{n+1} = 0. \tag{3}$$

Problema Cauchy pentru sistemul de ecuaţii (1) constă în determinarea soluţiilor q_k $(k=1, 2, ..., n)$ care să verifice condiţiile iniţiale :

$$q_k(0) = q_{k,0}; \quad i_k(0) = \frac{d}{dt} q_k \Big|_{t=+0} = i_{k,0} \quad (k=1, 2, ..., n). \tag{4}$$

Notînd cu $\theta(t)$ funcţia lui Heaviside, vom introduce funcţiile :

$$\bar{q}_k = \theta q_k; \quad \bar{i}_k = \theta i_k; \quad \bar{E}_k = \theta E_k \tag{5}$$

pentru care putem scrie relaţiile :

$$\frac{d}{dt} \bar{q}_k = \frac{\tilde{d}}{dt} \bar{q}_k + q_{k,0}\delta(t) = \bar{i}_k$$

$$(k = 1, 2, ..., n) \tag{6}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \bar{q}_k = \frac{\tilde{d}^2}{dt^2} \bar{q}_k + i_{k,0}\delta(t) + q_{k,0}\delta'(t).$$

Prin simbolurile $\frac{d}{dt}$, $\frac{\tilde{d}}{dt}$ s-a notat derivata în sensul distribuţiilor şi în sens obişnuit.

Deoarece ecuaţiile (1) sînt scrise în raport cu derivatele obişnuite, prin eliminarea lor pe baza relaţiilor (6), vom obţine pentru circuitul inductiv în spaţiul distribuţiilor ecuaţiile :

$$D_k \bar{q}_k + M_{k-1} \frac{d^2}{dt^2} \bar{q}_{k-1} + M_k \frac{d^2}{dt^2} \bar{q}_{k+1} = \bar{\mathscr{E}}_k(t) \quad (k = 1, 2, ..., n), \tag{1'}$$

unde

$$\bar{\mathscr{E}}_k(t) = \bar{E}_k + (L_k i_{k,0} + R_k q_{k,0} + M_{k-1} i_{k-1,0} + M_k i_{k+1,0})\,\delta(t) +$$

$$+ (L_k q_{k,0} + M_{k-1} q_{k-1,0} + M_k q_{k+1,0})\,\delta'(t). \tag{7}$$

Spre deosebire de (1) ecuaţiile (1') au particularitatea că includ şi condiţiile iniţiale (4), fapt pentru care problema Cauchy revine la determinarea distribuţiilor $\bar{q}_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$.

Fie X_k $(k = 1, 2, ..., n)$ soluţiile fundamentale corespunzătoare operatorilor D_k definiţi prin (2), în algebra de convoluţie K_+'. Soluţiile fundamentale X_k, satisfac, evident, relaţiile :

$$D_k X_k = \delta(t), \quad X_k = \theta(t)\, Z_k(t), \tag{8}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$D_k Z_k = 0\,; \quad Z_k(0) = 0, \quad Z_k'(0) = \frac{1}{L_k}, \quad L_k \neq 0. \tag{8'}$$

Ecuaţiile diferenţiale (1') se pot scrie în algebra de convoluţie K_+' sub forma :

$$D_k\delta * \bar{q}_k + M_{k-1}\delta'' * \bar{q}_{k-1} + M_k\delta'' * \bar{q}_{k+1} = \bar{\mathscr{E}}_k. \tag{1''}$$

Considerăm matricele :

$$(\bar{q}) = \begin{pmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{q}_n \end{pmatrix}; \quad (\bar{i}) = \begin{pmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{i}_n \end{pmatrix}; \quad (\bar{\mathscr{E}}) = \begin{pmatrix} \bar{\mathscr{E}}_1 \\ \bar{\mathscr{E}}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{\mathscr{E}}_n \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$(a) = \begin{pmatrix} D_1\delta & M_1\delta'' & 0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0 & 0 \\ M_1\delta'' & D_2\delta & M_2\delta'' & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2\delta & D_3\delta & M_3\delta'' & 0\ldots0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ldots\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ldots\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots0 & M_{n-2}\delta'' & D_{n-1}\delta & M_{n-1}\delta'' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & M_{n-1}\delta'' & D_n\delta \end{pmatrix}, \tag{10}$$

unde (a) este matricea coeficienţilor sistemului (1''), iar $(\bar{q})$, $(\bar{i})$, $(\bar{\mathscr{E}})$, respectiv, matricele sarcinilor, intensităţilor şi tensiunilor.

Sub formă matriceală sistemul (1'') se va scrie :

$$(q) * (\bar{q}) = (\bar{\mathscr{E}}), \tag{11}$$

unde $(a) \in (K_+')^{n\times n}$, $(\bar{q})$, $(\bar{\mathscr{E}}) \in (K_+')^n$.

Fie Δ determinantul corespunzător matricei (a).

Produsele ce intervin la calculul acestuia se consideră produse de convoluţie. Dezvoltînd determinantul Δ după produsele elementelor diagonalei principale, obţinem :

$$\Delta = \mu_0\delta^{(2n)} + \sum \mu_1\delta^{[2(n-1)]} * D_1\delta + \sum \mu_{12}\delta^{[2(n-2)]} * D_1\delta * D_2\delta +$$

$$+ \ldots + \sum \mu_{12\ldots n-2}\delta^{(IV)} * D_1\delta * D_2\delta * \ldots * D_{n-2}\delta + D_1\delta * \ldots * D_n\delta \tag{12}$$

în care μ_0 se obţine din Δ, înlocuind elementele de pe diagonala principală cu zero, iar δ'' cu unitatea.

Coeficientul $\mu_{1,2\ldots p}$ reprezintă minorul complementar al minorului ce conţine produsul $D_1\delta * D_2\delta * \ldots * D_p\delta$, unde termenii principali au fost înlocuiţi cu zero, iar δ'' cu unitatea.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, de exemplu, avem:

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 & M_2 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_2 & 0 & M_3 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \quad 0 & M_{n-2} & 0 & M_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \quad 0 & 0 & M_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Fie Δ_1 determinantul ce se obține din Δ înlocuind δ'' cu unitatea, iar elementul $D_k\delta$ de pe diagonala principală cu L_k.

PROPOZIȚIE. *Dacă* $L_k \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, $\Delta_1 \neq 0$, *atunci elementul* $\Delta \in K'_+$ *este inversibil în algebra de convoluție* K'_+ *și are expresia:*

$$\Delta^{-1} = (L_1X_1 * L_2X_3 * \ldots * L_n\boldsymbol{X}_n) * \frac{Z}{\Delta_1},$$

unde $Z \in K'_+$ *are expresia:*

$$Z = \delta(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Delta_1^k} [\mu_0(L_1X_1'' * L_2X_2'' * \ldots * L_nX_n'' - \delta) +$$
$$+ \sum \mu_1 L_1(L_2X_2'' * \ldots * L_nX_n'' - \delta) +$$
$$+ \ldots + \sum \mu_{12\ldots n-2} L_1L_2 \ldots L_{n-2}(L_{n-1}X_{n-1}'' * L_nX_n'' - \delta)]^{*k}. \qquad (13)$$

Demonstrație. În baza expresiei (12) a determinantului Δ și relațiilor (8), avem:

$$\Delta*(L_1X_1 * \ldots * L_nX_n) = \mu_0(L_1X_1'' * L_2X_2'' * \ldots * L_nX_n'') +$$
$$+ \sum L_1\mu_1(L_2X_2'' * \ldots * L_nX_n'') + \sum L_1L_2\mu_{12}(L_3X_3'' * \ldots * L_nX_n'') +$$
$$+ \ldots + \sum L_1L_2 \ldots L_{n-2}\mu_{12\ldots n-2}(L_{n-1}X_{n-1}'' * L_nX_n'') + L_1L_2 \ldots L_n\delta(t).$$

Ținînd seama de (8) și (8′) obținem:

$$L_kX_k'' = \delta + \theta L_kZ_k''$$

și în consecință putem scrie:

$$\Delta * (L_1X_1 * \ldots * L_nX_n) = \mu_0(L_1X_1'' * L_2X_2'' * \ldots * L_nX_n'' - \delta) +$$
$$+ \sum \mu_1 L_1(L_2X_2'' * \ldots * L_nX_n'' - \delta) +$$
$$+ \ldots + \sum L_1L_2 \ldots L_{n-2}\mu_{12\ldots n-2}(L_{n-1}X_{n-1}'' * L_nX_n'' - \delta) +$$
$$+ (\mu_0 + \sum L_1\mu_1 + \sum \mu_{12}L_1L_2 +$$
$$+ \ldots + \sum \mu_{12\ldots n-2}L_1L_2 \ldots L_{n-2} + L_1L_2 \ldots L_n)\,\delta.$$

Scanned with OKEN Scanner

Observăm că toate parantezele sînt funcții de clasa $C^0[0, \infty)$ cu excepția ultimei a cărei valoare este Δ_1.

Conform propoziției 1 din IV.2.3. elementul:

$$\delta + \frac{1}{\Delta_1}[\mu_0(L_1X_1'' * \ldots * L_nX_n'' - \delta) + \sum L_1\mu_1(L_2X_2'' * \ldots * L_nX_n'' - \delta) +$$
$$+ \ldots + \sum L_1L_2 \ldots L_{n-2}\mu_{12\ldots n-2}(L_{n-1}X_{n-1}'' * L_nX_n'' - \delta)] =$$
$$= \frac{\Delta}{\Delta_1} * (L_1X_1 * L_2X_2 * \ldots * L_nX_n)$$

este inversibil în K_+' și are expresia (13).

Deci
$$\Delta * \frac{1}{\Delta_1}(L_1X_1 * \ldots * L_nX_n) * Z = \delta$$

de unde
$$\Delta^{-1} = \frac{1}{\Delta_1}(L_1X_1 * \ldots * L_nX_n) * Z \tag{14}$$

și cu aceasta propoziția este demonstrată.

Ținînd seamă de propoziția 4 din IV. 1. matricea $(C) \in (K_+')^{n\times n}$ avînd elementele:
$$C_{ij} = \Delta^{-1} * \alpha_{ji}, \tag{15}$$

unde α_{ji} este complementul algebric al elementului a_{ij} din determinantul Δ, reprezintă matricea inversă a lui (a) în $(K_+')^{n\times n}$. În consecință, avem relațiile:
$$(C) = (a)^{-1}, \quad (a) * (C) = (\delta) \tag{16}$$

unde $(\delta) \in (K_+')^{n\times n}$ reprezintă elementul unitate în $(K_+')^{n\times n}$.

Cu aceasta soluția ecuației de convoluție (11) este unică și este dată de expresia:
$$(\bar{q}) = (a)^{-1} * (\bar{\mathscr{E}}). \tag{17}$$

Deoarece
$$\bar{i}_k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{q}_k,$$

matricea intensităților $(\bar{i})$ va avea expresia:
$$(\bar{i}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{q}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(C) * (\bar{\mathscr{E}}). \tag{18}$$

În ce privește soluția fundamentală X_k a operatorului D_k definit prin (2), aceasta satisface ecuația:
$$D_k\delta * X_k = \delta.$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde, prin aplicarea transformatei Laplace, vom obține în algebra K'_+, pentru soluția fundamentală X_k, expresiile:

$$X_k = \frac{1}{\omega_k L_k}\,\theta(t)\,e^{-\alpha_k t}\,\mathrm{sh}\,\omega_k t \quad \text{pentru} \quad \alpha_k > \frac{1}{\sqrt{C_k L_k}}, \tag{19}$$

unde $\alpha_k = \frac{1}{2}\frac{R_k}{L_k}$; $\omega_k = \sqrt{\alpha_k^2 - \frac{1}{C_k L_k}}$

$$X_k = \frac{\theta(t)}{\omega_{k_0}}\,e^{-\alpha_k t}\sin\omega_{k_0} t \quad \text{pentru} \quad \alpha_k < \frac{1}{\sqrt{C_k L_k}}, \tag{20}$$

unde $\omega_{k_0} = \sqrt{\frac{1}{C_k L_k} - \alpha_k^2}$

$$X_k = \frac{1}{L_k}\,t\theta(t)\,e^{-\alpha_k t} \quad \text{pentru} \quad \alpha_k = \frac{1}{\sqrt{C_k L_k}}. \tag{21}$$

Admitanța și impedanța circuitului

Circuitul cu cuplaj inductiv considerat în figura 13 face ca fiecărei matrice $(\bar{\mathscr{E}})$ a tensiunilor să-i corespundă în mod unic o matrice $(\bar{q})$ a sarcinilor și matricea $(\bar{i})$ a intensităților. Deci există doi operatori A_q și A_i care aplicați matricei $(\bar{\mathscr{E}})$ ne vor da matricele $(\bar{q})$ și $(\bar{i})$.

Astfel putem scrie relațiile funcționale:

$$(\bar{q}) = A_q(\bar{\mathscr{E}}); \quad (\bar{i}) = A_i(\bar{\mathscr{E}}). \tag{22}$$

Operatorii A_q și A_i îi numim, respectiv, admitanța circuitului relativ la sarcină și admitanța relativ la intensitate. Din expresiile (17) și (18) obținem:

$$\begin{aligned}(\bar{q}) &= (A_q) * (\bar{\mathscr{E}}) = (C) * (\bar{\mathscr{E}}),\\ (\bar{i}) &= (A_i) * (\bar{\mathscr{E}}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(C) * (\bar{\mathscr{E}}),\end{aligned} \tag{23}$$

de unde

$$(A_i) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A_q), \quad (A_q) = (C) = (a)^{-1}. \tag{24}$$

Matricele (A_q) și (A_i) se vor numi matricele admitanță corespunzătoare operatorilor A_q și A_i.

Inversele matricelor admitanță (A_q) și (A_i) în K'_+ notate (Z_q) și (Z_i) se numesc, respectiv, impedanța circuitului relativ la sarcină și la intensitate.

Scanned with OKEN Scanner

Evident, au loc relaţiile :

$$(A_q) * (Z_q) = (\delta)$$
$$(A_i) * (Z_i) = (\delta). \tag{25}$$

Din prima relaţie, în virtutea lui (24), avem :

$$(Z_q) = (a). \tag{26}$$

Din a doua relaţie (25), obţinem :

$$(A_i) * (Z_i) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A_q) * (Z_i) = (A_q) * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Z_i) = (A_q) * (Z_q) = (\delta), \tag{27}$$

de unde

$$(Z_q) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Z_i). \tag{28}$$

Relaţiile (24), (26), (28) arată dependenţa ce există între admitanţe şi impedanţe relative la sarcină şi intensitate.

Caz particular. Vom aplica rezultatele generale pentru cazul $n=2$, corespunzînd unei reţele constituită din două circuite cuplate inductiv (fig. 14).

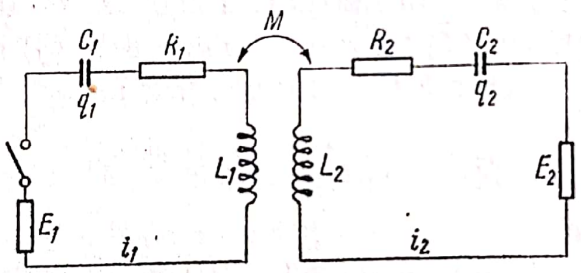

Fig. 14

În baza relaţiilor (3), (4) şi (7) avem :

$$\bar{\mathscr{E}}_1 = \bar{E}_1(t) + (L_1 i_{1,0} + R_1 q_{12\,0} + M i_{2,0})\,\delta(t) + (L_1 q_{1,0} + M q_{2,0})\,\delta'(t)$$
$$\bar{\mathscr{E}}_2 = \bar{E}_2(t) + (L_2 i_{2,0} + R_2 q_{2,0} + M i_{1,0})\,\delta(t) + (L_2 q_{2,0} + M q_{1,0})\,\delta'(t). \tag{29}$$

Matricea (a) dată de (10) devine

$$(a) = \begin{pmatrix} D_1\delta & M\delta'' \\ M\delta'' & D_2\delta \end{pmatrix}, \tag{30}$$

iar pentru determinantul Δ corespunzător vom obţine expresia :

$$\Delta = (D_1\delta) * (D_2\delta) - M^2\delta^{(IV)}. \tag{31}$$

Scanned with OKEN Scanner

Conform relaţiilor (13), (14) şi (15), pentru inversa matricei (a) şi a determinanului Δ, vom obţine expresiile

$$(C) = (a)^{-1}$$

$$\Delta^{-1} = (L_1X_1 * L_2X_2) * \frac{Z}{\Delta_1}; \quad \Delta_1 = L_1L_2 - M^2 \neq 0, \tag{32}$$

unde

$$C_{11} = \Delta^{-1} * D_2\delta = (X_1 * Z)\frac{L_1L_2}{\Delta_1}$$

$$C_{12} = C_{21} = -\Delta^{-1} * M\delta'' = -M(L_1X_1' * L_2X_2') * \frac{Z}{\Delta_1} \tag{33}$$

$$C_{22} = \Delta^{-1} * D_1\delta = (X_2 * Z)\frac{L_1L_2}{\Delta_1}$$

$$Z = \delta(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M^{2k}}{(L_1L_2 - M^2)^k}(L_1X_1'' * L_2X_2'' - \delta(t))^{*k}.$$

În virtutea relaţiilor (5), (17) necunoscutele $\bar{q}_1$, $\bar{q}_2$, reprezentînd sarcinile de pe plăcile condensatorilor, vor avea expresiile:

$$\bar{q}_1 = C_{11} * \bar{\mathscr{E}}_1 + C_{12} * \bar{\mathscr{E}}_2$$
$$\bar{q}_2 = C_{21} * \bar{\mathscr{E}}_1 + C_{22} * \bar{\mathscr{E}}_2. \tag{34}$$

Ţinînd seamă de relaţiile (33) vom obţine în definitiv:

$$\bar{q}_1 = \frac{L_1L_2}{\Delta_1}[X_1 * \bar{\mathscr{E}}_1 - M(X_1' * X_2') * \bar{\mathscr{E}}_2] * Z$$
$$\bar{q}_2 = \frac{L_1L_2}{\Delta_1}[-M(X_1' * X_2') * \bar{\mathscr{E}}_1 + X_2 * \bar{\mathscr{E}}_2] * Z. \tag{35}$$

În funcţie de soluţiile fundamentale X_1, X_2 ale operatorilor D_1, D_2 definiţi prin:

$$D_k = L_k\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + R_k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C_k} \qquad (k = 1, 2)$$

vom obţine sub formă de serie expresiile sarcinilor $\bar{q}_1$ şi $\bar{q}_2$.

Expresiile posibile ale soluţiilor fundamentale X_1, X_2 sînt date de relaţiile (19), (20) şi (21).

3. Cvadripoli

Un circuit electric la care deosebim două borne de intrare şi două de ieşire se numeşte cvadripol. Asemenea circuite fac legătura între generatoarele şi receptoarele de energie electrică. Cvadripolii se împart în două

Scanned with OKEN Scanner

clase şi anume: cvadripoli activi şi cvadripoli pasivi, după cum conţin sau nu surse de energie electrică.

În figura 15 avem reprezentată schema bloc a unui cvadripol, unde $i_1(t)$, $E_1(t)$; $i_2(t)$, $E_2(t)$ reprezintă curenţii şi tensiunile la intrare (bornele 1, 1′) şi la ieşire (bornele 2, 2′).

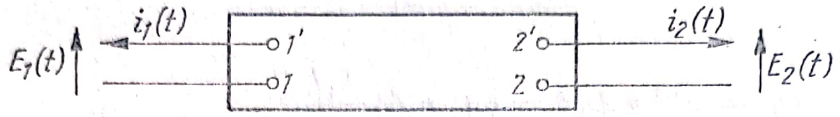

Fig. 15

În cele ce urmează vom considera numai cvadripoli pasivi şi vom presupune că parametrii cvadripolilor constituiţi din rezistoare, inductanţe şi capacităţi sînt constanţi. Un cvadripol este liniar dacă dependenţa dintre mărimile de intrare şi de ieşire se exprimă prin funcţii liniare. În particular, dacă la un cvadripol între mărimile $\varphi_2(t)$ şi $\varphi_1(t)$ respectiv de ieşire şi de intrare există relaţia:

$$\varphi_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_1(t, \tau)\, \varphi_1(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \tag{1}$$

atunci cvadripolul respectiv este liniar. Evident, relaţia (1) defineşte un operator integral la care funcţia $K_1(t, \tau)$ reprezintă nucleul transformării integrale.

Dacă nucleul $K_1(t, \tau)$ este de forma $K_1(t, \tau) = K(t-\tau)$, atunci dependenţa între mărimile de intrare şi de ieşire se exprimă printr-o ecuaţie de convoluţie şi anume:

$$\varphi_2(t) = K(t) * \varphi_1(t). \tag{2}$$

Pentru generalitate, ecuaţia (2) se va considera în spaţiul distribuţiilor.

Cvadripolii la care între mărimile de intrare şi de ieşire există relaţii de tipul (2) se numesc cvadripoli liniari staţionari. Distribuţia $K(t)$ se numeşte distribuţie pondere şi ea depinde de natura mărimii de intrare. Pentru $\varphi_1(t) = \delta(t)$, obţinem $\varphi_2(t) = K(t)$.

Deci distribuţia pondere reprezintă răspunsul cvadripolului la impulsul unitate $\delta(t)$. Imaginea Laplace a distribuţiei pondere $K(t)$, dacă există, se numeşte funcţia de transfer a cvadripolului.

Să considerăm acum doi cvadripoli staţionari cu distribuţiile pondere $K_1(t)$ şi $K_2(t)$. Prin legarea în lanţ a acestor cvadripoli se înţelege montajul din figura 16.

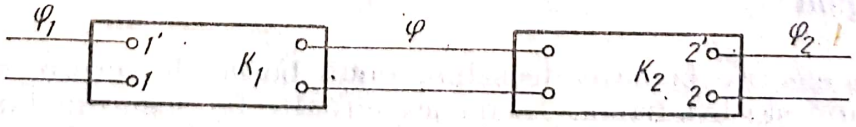

Fig. 16

Notînd cu $\varphi(t)$ mărimea de ieşire din primul cvadripol, avem :

$$\varphi = K_1 * \varphi_1. \tag{3}$$

Deoarece această mărime reprezintă mărimea de intrare pentru al doilea cvadripol, putem scrie :

$$\varphi_2 = K_2 * \varphi \tag{4}$$

Din relaţiile (3) şi (4) obţinem :

$$\varphi_2 = (K_1 * K_2) * \varphi_1$$

în ipoteza că distribuţiile φ_1, φ_2, K_1, K_2 aparţin algebrei de convoluţie K'_+.

În consecinţă, prin legarea în lanţ a doi cvadripoli liniari staţionari, distribuţia pondere este dată de expresia :

$$K = K_1 * K_2. \tag{5}$$

Exemplu. Considerăm cvadripolul staţionar din figura 17.

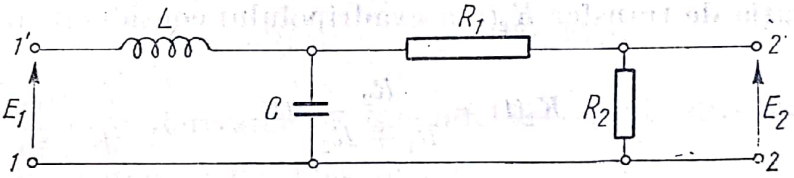

Fig. 17

care se obţine prin legarea în lanţ a cvadripolilor reprezentaţi în figura 18.

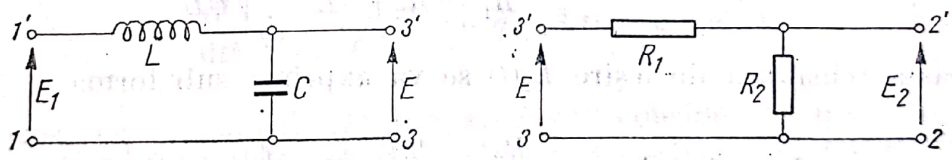

Fig. 18

Pentru primul cvadripol din figura 18, putem scrie ecuaţiile :

$$E_1 = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t) + \frac{1}{C}q(t), \quad E(t) = \frac{q(t)}{C}, \quad i = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}. \tag{6}$$

Eliminînd sarcina electrică $q(t)$, obţinem :

$$LC\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}E(t) + E(t) = E_1. \tag{7}$$

Distribuţia pondere $K_1(t)$ a cvadripolului considerat reprezintă soluţia fundamentală a ecuaţiei (7) deoarece ea se obţine considerînd $E_1(t) = \delta(t)$.

Scanned with OKEN Scanner

În consecință, aplicînd transformata Laplace găsim :

$$L[K_1(t)] = \frac{1}{LCp^2 + 1},$$

de unde

$$K_1(t) = \frac{1}{\sqrt{CL}}\,\theta(t)\sin\frac{t}{\sqrt{CL}}.$$

Tensiunea $E(t)$, reprezentînd mărimea de ieşire din primul cvadripol, va avea expresia :

$$E(t) = K_1 * E_1. \tag{8}$$

Analog, pentru al doilea cvadripol din figura 18 obţinem ecuaţiile :

$$E(t) = (R_1 + R_2)\,i(t), \quad E_2 = R_2 i(t),$$

de unde

$$E_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}E(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\,\delta(t) * E. \tag{9}$$

Deci distribuţia de transfer $K_2(t)$ a cvadripolului considerat are expresia :

$$K_2(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\,\delta(t). \tag{10}$$

Conform formulei (5), pentru distribuţia pondere a cvadripolului din figura 17, vom obţine expresia :

$$K(t) = K_1 * K_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\,\frac{\theta(t)}{\sqrt{CL}}\sin\frac{t}{\sqrt{CL}}. \tag{11}$$

Cu aceasta tensiunea de ieşire $E_2(t)$ se va exprima sub forma :

$$E_2 = K * E_i = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\,\frac{\theta(t)}{\sqrt{CL}}\sin\frac{t}{\sqrt{CL}} * E_1.$$

§ 2. Aplicaţii în mecanică

1. Sisteme vibrante liniare

Din punct de vedere matematic fenomenele de vibraţii conduc la sisteme de ecuaţii diferenţiale de ordinul doi.

Studiul acestora se poate realiza unitar şi eficient, utilizînd metodele calculului matriceal şi soluţiile fundamentale ale unor operatori. În acest mod, soluţia generală a sistemelor vibrante liniare în spaţiul distribuţiilor se poate exprima sub forma unei serii de distribuţii matriceale.

Scanned with OKEN Scanner

Fie q_i $(i = 1, 2, ..., n)$ coordonatele generalizate ale unui sistem vibrant, avînd n grade de libertate.

Considerînd cazul vibraţiilor mici, ecuaţiile lui Lagrange ce descriu starea sistemului pot fi scrise sub o formă liniară şi anume:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\ddot{q}_k + b_{ik}\dot{q}_k + c_{ik}q_k) = F_i(t) \quad (i = 1, 2, ..., n), \tag{1}$$

unde $F_i(t)$ reprezintă forţa generalizată corespunzătoare forţelor perturbatoare ce acţionează asupra sistemului.

Coeficienţii sistemului sînt constante care satisfac relaţiile:

$$a_{ik} = a_{ki}, \quad c_{ik} = c_{ki} \quad (i, k = 1, 2, ..., n). \tag{2}$$

Problema Cauchy pentru sistemul (1) constă în determinarea soluţiilor q_k $(k = 1, 2, ..., n)$ de clasa $C^2[0, \infty)$ care să verifice condiţiile iniţiale:

$$q_k\Big|_{t=+0} = q_{k,0}, \quad \dot{q}_k\Big|_{t=+0} = \dot{q}_{k,0}. \tag{3}$$

Cu ajutorul funcţiei lui Heaviside introducem funcţiile:

$$\bar{q}_k = \theta(t)\, q_k(t), \quad \bar{F}_k = \theta(t)\, F_k(t).$$

Notînd cu $\frac{d}{dt}$, $\frac{\tilde{d}}{dt}$ derivatele considerate în sensul distribuţiilor şi în sens obişnuit, putem scrie relaţiile:

$$\frac{d\bar{q}_k}{dt} = \frac{\tilde{d}}{dt}\bar{q}_k + q_{k,0}\delta(t) \quad (k = 1, 2, ..., n) \tag{4}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\bar{q}_k = \frac{\tilde{d}^2}{dt^2}\bar{q}_k + \dot{q}_{k,0}\,\delta(t) + q_{k,0}\,\delta'(t).$$

Deoarece în ecuaţiile (1) derivatele sînt considerate în sens obişnuit, atunci în baza formulelor (4) vom obţine în spaţiul distribuţiilor pentru sistemele vibrante liniare ecuaţiile:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\ddot{\bar{q}}_k + b_{ik}\dot{\bar{q}}_k + c_{ik}\bar{q}_k) = \mathscr{F}_i(t), \quad (i = 1, 2, ..., n), \tag{1'}$$

unde

$$\mathscr{F}_i(t) = \bar{F}_i + \sum_{k=1}^{n} [(a_{ik}\dot{q}_{k,0} + b_{ik}q_{k,0})\,\delta(t) + a_{ik}q_{k,0}\delta'(t)]. \tag{5}$$

Subliniem faptul că ecuaţiile (1') ce descriu starea sistemului vibrant, considerate în spaţiul distribuţiilor, includ şi condiţiile iniţiale, fapt pentru care problema Cauchy corespunzătoare lui (1) şi (3) revine la determinarea distribuţiilor $\bar{q}_k$. În ce priveşte forţa generalizată $\mathscr{F}_i(t)$, aceasta este o distribuţie cu suportul în $[0, \infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie operatorii diferenţiali :

$$D_{ik} = a_{ik}\frac{d^2}{dt^2} + b_{ik}\frac{d}{dt} + C_{ik} \quad (i, k = 1, 2, ..., n) \tag{6}$$

şi X_k soluţia fundamentală corespunzătoare operatorului D_{kk} în algebra de convoluţie K'_+.

Soluţia fundamentală X_k este o funcţie de clasa C^∞ $[0, \infty)$ şi satisface relaţiile :

$$\begin{gathered} D_{kk}X_k = \delta(t); \quad X_k = \theta(t)\, Z_k(t) \\ D_{kk}Z_k = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Dacă $a_{kk} \neq 0$ $(k = 1, 2, ..., n)$, atunci avem :

$$Z_k(0) = 0, \quad Z'_k(0) = \frac{1}{a_{kk}}. \tag{8}$$

Introducem matricele :

$$(a) \in (K'_+)^{n\times n}, \quad (\mathscr{F}), (\bar{q}) \in (K'_+)^n,$$

unde

$$\begin{gathered} (a) = (D_{ij}\delta) \quad (i, j = 1, 2, ..., n) \\ (\mathscr{F}) = \begin{pmatrix} \mathscr{F}_1 \\ \vdots \\ \mathscr{F}_n \end{pmatrix}, \quad (\bar{q}) = \begin{pmatrix} \bar{q}_1 \\ \vdots \\ \bar{q}_n \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{9}$$

Cu aceasta sistemul de ecuaţii (1′) se poate transcrie sub o formă matriceală şi anume :

$$(a) * (\bar{q}) = (\mathscr{F}). \tag{10}$$

Fie matricele

$$\begin{gathered} (a^1) = (a_{ij}\delta) + (\theta a_{ii} D_{ij} Z_i); \quad (i, j = 1, 2, ..., n) \\ (\mathscr{F}^1) = \begin{pmatrix} a_{11}X_1 * \mathscr{F}_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{nn}X_n * \mathscr{F}_n \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{11}$$

Conform propoziţiei 2 din IV.2.2. ecuaţia matriceală (10) este echivalentă cu ecuaţia :

$$(a^1) * (\bar{q}) = (\mathscr{F}^1). \tag{10′}$$

Dacă $\Delta = |a_{ij}| \neq 0$ şi $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$, atunci, conform propoziţiei 3 din IV.2.2., elementul $(a^1) \in (K'_+)^{n\times n}$ este inversibil în $(K'_+)^{n\times n}$

Scanned with OKEN Scanner

şi expresia sa este dată de formula (37), iar soluţia ecuaţiei (10), respectiv (10'), conform formulei (44), va fi:

$$(\bar{q}) = (a^1) * (\mathscr{F}^1) = (a_{ij})^{-1} \cdot (\mathscr{F}^1) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k [((a_{ij})^{-1} \cdot (0 a_{ii} D_{ij} Z_i))^{*k} \cdot (a_{ij})^{-1}] * (\mathscr{F}^1). \tag{12}$$

În continuare vom considera cîteva cazuri particulare ale acestei formule. Astfel, la studiul vibraţiilor mecanice, se întîlneşte frecvent cazul cînd coeficienţii a_{ij} verifică relaţia:

$$a_{ij} = 0 \quad (i \neq j). \tag{13}$$

În acest caz, ţinînd seama de formula (46) din IV.2.2. soluţia sistemelor vibrante va fi:

$$(\bar{q}) = (\mathscr{F}^2) + \sum_{k=1}^{\infty} [(-1)^k (\theta D_{ij} Z_i)^{*k} \cdot (a_{ii}^{-1} \delta_{ij})] * (\mathscr{F}^1). \tag{14}$$

unde

$$(\mathscr{F}^2) = \begin{pmatrix} X_1 * \mathscr{F}_1 \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \\ X_n * \mathscr{F}_n \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Modelul mecanic particular al acestui caz este reprezentat în figura 19, care corespunde unui sistem cu vibraţii longitudinale şi cu n grade de libertate.

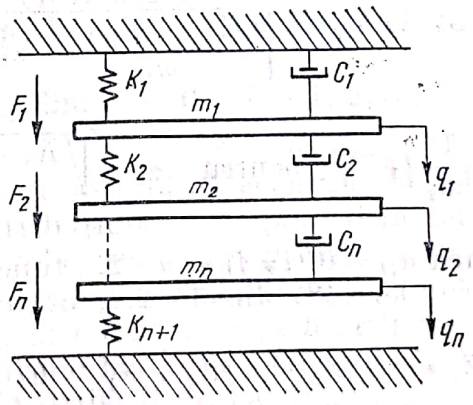

Fig. 19

Pe baza legii fundamentale a mecanicii vom obţine pentru masa m_i ecuaţia:

$$m_i \ddot{q}_i = F_i(t) - K_i(q_i - q_{i-1}) - C_i(\dot{q}_i - \dot{q}_{i-1}) - K_{i+1}(q_i - q_{i+1}) - C_{i+1}(\dot{q}_i - \dot{q}_{i+1})$$
$$q_0 = \dot{q}_0 = q_{n+1} = \dot{q}_{n+1} = 0; \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{16}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde C_i, K_i reprezintă respectiv coeficientul de amortizare și constanta de elasticitate, iar $F_i(t)$ forța perturbatoare ce acționează asupra masei m_i.

În acest caz $a_{ii} = m_i$, iar $\Delta = m_1 m_2 \ldots m_n \neq 0$. Operatorii diferențiali D_{ij} definiți prin (6) au expresiile:

$$D_{ii} = m_i \frac{d^2}{dt^2} + (C_i + C_{i+1}) \frac{d}{dt} + (K_i + K_{i+1})$$

$$D_{ii-1} = -C_i \frac{d}{dt} - K_i \tag{17}$$

$$D_{ii+1} = -C_{i+1} \frac{d}{dt} - K_{i+1}$$

și $D_{ij} = 0$ pentru $|i - j| \geqslant 2$.

Caracteristica acestui sistem constă și în faptul că matricea operatorilor D_{ij} este o matrice Iacobi.

În ce privește funcțiile Z_i ce intervin în formulele (12) și (14), acestea, în cazul considerat, au expresiile:

$$Z_i(t) = \frac{1}{m_i \omega_i} e^{-\alpha_i t} \operatorname{sh} \omega_i t \quad \text{pentru} \quad \alpha_i > \sqrt{\frac{K_i + K_{i+1}}{m_i}}, \tag{18}$$

unde

$$\alpha_i = \frac{1}{2} \frac{C_i + C_{i+1}}{m_i}, \quad \omega_i = \sqrt{\alpha_i^2 - \frac{K_i + K_{i+1}}{m_i}}$$

$$Z_i(t) = \frac{1}{\omega_0} e^{-\alpha_i t} \sin \omega_0 t \quad \text{pentru} \quad \alpha_i < \sqrt{\frac{K_i + K_{i+1}}{m_i}}. \tag{19}$$

unde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_i + K_{i+1}}{m_i} - \alpha_i^2}$$

$$Z_i(t) = \frac{1}{m_i} t e^{-\alpha_i t} \quad \text{pentru} \quad \alpha_i = \sqrt{\frac{K_i + K_{i+1}}{m_i}}. \tag{20}$$

În particular, dacă $a_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ și $n = 2$, atunci formula (14) se simplifică și conform formulei (48) din IV.2.2, obținem:

$$(\bar{q}) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} (\theta D_{12} Z_1 * \theta D_{21} Z_2)^{*k} * (X_1 * \mathscr{F}_1 - \theta D_{12} Z_1 * X_2 * \mathscr{F}_2) \\ (\theta D_{12} Z_1 * \theta D_{21} Z_2)^{*k} * (X_2 * \mathscr{F}_2 - \theta D_{21} Z_2 * X_1 * \mathscr{F}_1) \end{pmatrix} \tag{21}$$

unde se consideră

$$(\theta D_{ij} Z_i)^0 = \delta.$$

Cînd condițiile inițiale sînt nule, iar forțele perturbatoare

$$\bar{F}_i(t) = A_i \delta(t) \quad (i = 1, 2)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde A_i sînt constante, atunci în baza formulelor (5), (15) şi (21) soluţia sistemului vibrant cu două grade de libertate va fi :

$$(q) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} (\theta D_{12}Z_1 * \theta D_{21}Z_2)^{*k} * (A_1X_1 - \theta D_{12}Z_1 * A_2X_2) \\ (\theta D_{12}Z_1 * \theta D_{21}Z_2)^{*k} * (A_2X_2 - \theta D_{21}Z_2 * A_1X_1) \end{pmatrix} \qquad (21')$$

2. Soluţia fundamentală corespunzătoare rezolvării în deplasări pentru problema statică a spaţiului elastic

Noţiunea de soluţie fundamentală introdusă prin definiţia 4 în IV.1., constituie un mijloc eficient pentru studiul şi rezolvarea problemelor la limită din cadrul teoriei elasticităţii liniare. Pentru a ilustra acest fapt vom determina soluţia în deplasări în spaţiul distribuţiilor, în cazul spaţiului elastic omogen şi izotrop.

Fie $u_i(x, t)$, $X_i(x, t)$ $(i = 1, 2, 3)$, $x \in R^3$, respectiv componentele deplasării şi proiecţiile forţelor volumice ce acţionează asupra spaţiului elastic. Ecuaţiile de echilibru corespunzătoare formulării în deplasări a teoriei elasticităţii sînt date de ecuaţiile lui Lamé :

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x_i} = -X_i \quad (i = 1, 2, 3), \qquad (1)$$

unde $e = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ reprezintă deformaţia specifică volumică, λ şi μ constantele elastice ale lui Lamé, ρ masa specifică, iar Δ operatorul lui Laplace în R^3.

Problema pentru spaţiul elastic supus acţiunii unor forţe volumice X_i exprimate prin funcţii continue, constă în determinarea funcţiilor $u_i(x, t)$ de clasa C^3, reprezentînd componentele deplasării care să fie soluţii ale ecuaţiilor lui Lamé (1) şi să satisfacă condiţiile la limită :

$$\lim_{\|x\| \to \infty} u_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \qquad (2)$$

Din ipotezele menţionate rezultă că ecuaţiile de echilibru (1) pot fi considerate în spaţiul distribuţiilor, presupunînd în acest scop că atît deplasările u_i, cît şi forţele volumice sînt exprimate prin distribuţii.

În acest fel rezolvarea în deplasări a problemei spaţiului elastic revine la determinarea distribuţiilor $u_i \in K'(R^3)$ care să satisfacă ecuaţiile (1). În ce priveşte condiţiile la limită (2), acestea se verifică numai în cazul cînd soluţiile u_i, sînt distribuţii de tip funcţie.

Pentru transcrierea ecuaţiilor (1) sub formă matriceală vom introduce operatorii diferenţiali :

$$D_{ii} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \mu \Delta$$

$$i, j = 1, 2, 3 \qquad (3)$$

$$D_{ij} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

precum și matricele :

$$(u)=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad (X)=\begin{pmatrix} -X_1 \\ -X_2 \\ -X_3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$(a)=(D_{ij}\delta), \qquad \delta \in K'(R^3).$$

Cu ajutorul acestor matrice ecuațiile (1) se vor scrie sub forma unei ecuații matriceale de convoluție și anume :

$$(a) * (u) = (X). \tag{1'}$$

DEFINIȚIE. Numim soluție fundamentală corespunzătoare ecuației (1'), respectiv matricei $(a)\in(\mathscr{E}')^{3\times 3}$, distribuția $(E)\in(K')^{3\times 3}$ satisfăcînd relațiile :

$$(a) * (E) = (E) * (a) = (\delta), \tag{5}$$

unde (δ) reprezintă elementul unitate în inelul de convoluție $(\mathscr{E}')^{3\times 3}$.

Notînd cu $E_{ij}(i.\ j=1, 2, 3)$ componentele matricei (E), atunci, de exemplu, componentele E_{i1} $(i=1, 2, 3)$ reprezintă soluția (u) a ecuației (1'), considerînd pentru membrul drept (X) matricea coloană $(X)_1$, avînd expresia :

$$(X)_1=\begin{pmatrix} \delta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Soluția fundamentală (E) se determină considerînd succesiv pentru membrul drept al ecuației (1') matricele :

$$(X)_2=\begin{pmatrix} 0 \\ \delta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (X)_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Odată determinată soluția fundamentală (E), vom obține pentru soluția ecuației (1') expresia :

$$(u)=(E) * (X), \tag{8}$$

care va reprezenta soluția generalizată în deplasări a problemei spațiului elastic în spațiul distribuțiilor.

Pentru determinarea soluției fundamentale (E) vom aplica transformata Fourier ecuației (1') în raport cu ansamblul variabilelor $(x_1, x_2, x_3)\in R^3$, considerînd pentru membrul drept matricea $(X)_1$.

Vom obține astfel ecuațiile :

$$(\lambda+\mu)\xi_i\left(\sum_{i=1}^{3}\xi_i\hat{E}_{i1}\right)+\mu\|\xi\|^2\hat{E}_{i1}=Y_{i1} \quad (i=1, 2, 3), \tag{9}$$

unde $\hat{E}_{i1}=F[E_{i1}]$, $Y_{11}=-1$, $Y_{21}=0$, $Y_{31}=0$.

Înmulțind ecuația (9) cu α_i și însumînd relațiile obținute, avem :

$$\sum_{i=1}^{3} \xi_i \hat{E}_{i1} = \frac{\sum_{i=1}^{3} \xi_i Y_i}{(\lambda+2\mu)\,\|\xi\|^2} = \frac{-\xi_1}{(\lambda+2\mu)\|\xi\|^2}, \tag{10}$$

Prin introducerea acestei expresii în (9) găsim pentru $\hat{E}_{i1}$ expresia :

$$\hat{E}_{i1} = \frac{Y_i}{\mu\|\xi\|^2} + \frac{\xi_1 \xi_i}{\mu(\lambda+2\mu)\|\xi\|^4} \qquad (i=1\ 2,\ 3). \tag{11}$$

În vederea aplicării transformatei Fourier inversă, observăm că deoarece :

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta, \quad r = \|x\|, \quad x \in R^3$$

avem :

$$F\left[\frac{1}{4\pi r}\right] = \frac{1}{\|\xi\|^2}\ ; \frac{\partial}{\partial \xi_J}\frac{1}{\|\xi\|^2} = \frac{i}{4\pi} F\left[\frac{x_J}{r}\right]. \tag{12}$$

deci

$$F\left[\frac{x_j}{r}\right] = 8\pi i \frac{\xi_j}{\|\xi\|^4}. \tag{13}$$

De asemenea au loc formulele :

$$F\left[\frac{\partial}{\partial x_J}\left(\frac{x_J}{r}\right)\right] = F\left[\frac{1}{r}\right] - F\left[\frac{x_J^2}{r^3}\right] = -i\xi_J F\left[\frac{x_J}{r}\right] = 8\pi \frac{x_J^2}{\|\xi\|^4}$$

$$F\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{x_J}{r}\right)\right] = -F\left[\frac{x_J x_k}{r^3}\right] = -i\xi_k F\left[\frac{x_J}{r}\right] = 8\pi \frac{\xi_J \xi_k}{\|\xi\|^4}, \quad J \neq k. \tag{14}$$

Aplicînd expresiei (11) transformata Fourier inversă și ținînd seamă de formulele (12), (13), (14), obținem :

$$E_{i1} = \frac{Y_{i1}}{4\pi\mu} \cdot \frac{1}{r} - \frac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \cdot \frac{x_1 x_i}{r^3} \quad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{15}$$

adică

$$E_{11} = -\frac{1}{4\pi\mu} \cdot \frac{1}{r} - \frac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \cdot \frac{x_1^2}{r^3}$$

$$E_{21} = -\frac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \cdot \frac{x_1 x_2}{r^3}\ ;\ E_{31} = -\frac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \cdot \frac{x_1 x_3}{r^3}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Procedînd analog şi considerînd în ecuaţia (1′) pentru membrul drept matricele $(X)_2$, $(X)_3$ definite prin formulele (7), obţinem :

$$E_{i2} = \frac{Y_{i2}}{4\pi\mu} \cdot \frac{1}{r} - \frac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \cdot \frac{x_2 x_i}{r^3} \tag{16}$$

$$E_{i3} = \frac{Y_{i3}}{4\pi\mu} \cdot \frac{1}{r} - \frac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \cdot \frac{x_3 x_i}{r^3},$$

unde

$$Y_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ -1, & i \neq j \end{cases} \tag{17}$$

Prin formulele (15) şi (16) se determină componentele soluţiei fundamentale (E) corespunzătoare rezolvării în deplasări a problemei statice a spaţiului elastic. Aceste formule pot fi scrise concentrat sub forma :

$$E_{ij} = -\frac{\delta_{ij}}{4\pi\mu} \cdot \frac{1}{r} - \frac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \cdot \frac{x_i x_j}{r^3} \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{18}$$

unde δ_{ij} reprezintă simbolul lui Kronecker.

Observăm că matricea (a) precum şi inversa ei $(E)=(a)^{-1}$ sînt matrice simetrice şi pe baza acestei proprietăţi se verifică uşor că relaţia (5) este satisfăcută, deci într-adevăr matricea (E) ale cărei componente sînt date de formulele (18) reprezintă soluţia fundamentală a ecuaţiei (1′).

De asemenea, remarcăm că funcţiile E_{ij} sînt local integrabile, deci soluţia fundamentală $(E) \in (K')^{3\times 3}$ reprezintă o distribuţie matriceală de tip funcţie cu proprietatea că pentru $r \to +\infty$, $(E) \to (0)$.

În ipoteza că matricea (X) generată de forţele volumice are elementele sale distribuţii cu suport compact, expresia (8) există şi în consecinţă soluţia problemei spaţiului elastic în deplasări va fi dată de relaţia (8) sau sub formă explicită de formulele :

$$u_i = -E_i * X_1 - E_{i2} * X_2 - E_{i3} * X_3 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{19}$$

Astfel, de exemplu, dacă asupra spaţiului elastic acţionează în punctul $M_0(x_0) \in R^3$ o forţă $\vec{F}(P_1, P_2, P_3)$, atunci acţiunea ei este echivalentă cu o forţă volumică, avînd proiecţiile :

$$X_i = P_i \delta(x - x_0) \quad (i=1, 2, 3). \tag{20}$$

Pe baza formulelor (19) vom obţine pentru componentele deplasării, expresiile :

$$u_i(x) = -P_1 E_{i1}(x - x_0) - P_2 E_{i2}(x - x_0) - P_3 E_{i3}(x - x_0) \tag{21}$$
$$(i=1, 2, 3)$$

care, evident, satisfac condiţiile la limită (2).

Scanned with OKEN Scanner

În particular, dacă $x_0=0$, obținem :

$$u_1 = P_1\left(\frac{1}{4\pi\mu}\cdot\frac{1}{r}+\frac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\cdot\frac{x_1^2}{r^3}\right)+P_2\frac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\cdot\frac{x_1x_2}{r^3}+$$
$$+P_3\frac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\cdot\frac{x_1x_3}{r^3}$$

$$u_2 = P_1\frac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\cdot\frac{x_1x_2}{r^3}+P_2\left(\frac{1}{4\pi\mu}\cdot\frac{1}{r}+\frac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\cdot\frac{x_2^2}{r^3}\right)+$$
$$+P_3\frac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\cdot\frac{x_2x_3}{r^3}$$

$$u_3 = P_1\frac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\frac{x_1x_3}{r^3}+P_2\frac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\cdot\frac{x_2x_3}{r^3}+$$
$$+P_3\left(\frac{1}{4\pi\mu}\cdot\frac{1}{r}+\frac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\cdot\frac{x_3^2}{r^3}\right).$$

3. Solidul vîscoelastic

Studiul proprietăților fizico-mecanice ale unor largi clase de corpuri solide deformabile se poate realiza cu ajutorul modelului unui corp liniar perfect elastic. Un astfel de corp se caracterizează prin aceea că sub acțiunea sarcinilor exterioare se deformează, iar după întreruperea acțiunii acestora revine la forma inițială.

În acest fel forma deformată a solidului perfect elastic va fi determinată numai de sarcinile exterioare ce acționează în acel moment asupra sa și, în consecință, între tensiuni și deformații va exista o corespondență biunivocă exprimată printr-o relație liniară între tensiuni și deformațiile specifice (legea lui Hooke), care constituie legea constitutivă a solidului liniar perfect elastic.

Solidele deformabile, care după încetarea acțiunii sarcinilor exterioare nu revin la forma lor inițială, sînt solide neelastice.

Un model de solid neelastic este solidul liniar vîscoelastic care este constituit din două medii diferite dintre care unul perfect elastic iar al doilea avînd proprietăți de fluid vîscos. Prin definiție, se admite că aceste corpuri suferă numai deformații mici, iar proprietățile mecanice ale corpului respectă principiul suprapunerii efectelor al lui Boltzmann. Pentru studiul diferitelor modele de solide unidimensionale liniar vîscoelastice se poate considera că între tensiunea σ și deformația specifică ε, depinzînd de timp, există o relație de forma :

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\sigma(t)=Q\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\varepsilon(t) \qquad (1)$$

în care P și Q sînt operatori diferențiali liniari cu coeficienți constanți ce caracterizează solidul vîscoelastic considerat.

Scanned with OKEN Scanner

Dependența dintre mărimile σ și ε dată de relația (1) în care intervine factorul timp, reprezintă legea constitutivă generală exprimată prin operatori diferențiali pentru solidele unidimensionale liniar vîscoelastice.

În ce privește proprietățile mecanice ale solidului liniar vîscoelastic, acestea se exprimă cu ajutorul funcțiilor de fluaj și de relaxare notate, respectiv, cu φ și ψ. Aceste funcții se definesc prin formulele:

$$\frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \varphi(t,\ \sigma_0); \quad \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = \psi(t,\ \sigma_0), \tag{2}$$

unde σ_0 și ε_0 reprezintă tensiunea și deformația specifică corespunzătoare aplicării unei sarcini constante, la momentul inițial, asupra corpului vîscoelastic unidimensional considerat în repaus.

Corespondentul legii lui Hooke pentru solidele unidimensionale, liniar vîscoase, îl constituie relațiile integrale ale lui Boltzmann:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\mathrm{d}\varepsilon(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \psi(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\mathrm{d}\sigma(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \varphi(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{3}$$

Vom admite că σ și ε se exprimă prin funcții de clasa $C^1(R)$, iar φ și ψ sînt funcții continue pe R, astfel încît integralele (3) să existe. Notînd cu θ funcția lui Heaviside, formulele (3) se pot scrie cu ajutorul produsului de convoluție sub forma:

$$\sigma = \theta\psi * \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}, \quad \varepsilon = \theta\varphi * \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}. \tag{4}$$

Într-adevăr, avem:

$$\theta\psi * \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\varepsilon(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\theta(t-\tau)\psi(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{t} \frac{\mathrm{d}\varepsilon(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\psi(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \sigma(t)$$

deoarece pentru $\tau > t$, avem $\theta(t-\tau)=0$.

Pentru transcrierea ecuațiilor (4) în spațiul distribuțiilor vom presupune că σ și ε sînt distribuții cu suporturile în $R_+ = [0, \infty)$, ceea ce implică faptul că corpul vîscoelastic pentru $t \leqslant 0$ este în stare naturală, deci $\varepsilon = \sigma = 0$.

Atunci φ și ψ sînt de asemenea distribuții și în consecință formulele (4) devin:

$$\sigma = \psi * \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = \varepsilon * \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}, \quad \varepsilon = \varphi * \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = \sigma * \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \tag{5}$$

unde $\sigma, \varepsilon, \varphi, \psi \in K'_+$.

Remarcăm că ecuațiile (5) în condițiile precizate mai sus reprezintă o generalizare a relațiilor lui Boltzmann în spațiul distribuțiilor.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuaţiile (5) constituie astfel un sistem de două ecuaţii în algebra de convoluţie K'_+ în raport cu necunoscutele σ şi ε. Considerînd pentru σ şi ε distribuţii de forma :

$$\sigma(t) = \sigma_0 \theta(t), \qquad \varepsilon = \varepsilon_0 \theta(t). \tag{6}$$

în baza formulelor (5) avem :

$$\sigma = \psi * \varepsilon_0 \delta = \varepsilon_0 \psi$$

$$\varepsilon = \varphi * \sigma_0 \delta = \sigma_0 \varphi \tag{7}$$

de unde expresiile distribuţiilor de fluaj şi relaxare vor fi :

$$\varphi = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0}, \qquad \psi = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}. \tag{8}$$

Un model de corp vîscoelastic particular este modelul Kelvin (Voigt) pentru care legea constitutivă este de forma :

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}, \tag{9}$$

unde E reprezintă modulul de elasticitate şi η un coeficient de vîscoelasticitate. Parametrul $t^* = \frac{\eta}{E}$ se numeşte timp de întîrziere (sau timpul de fluaj).

Remarcăm că termenul $E\varepsilon(t)$ corespunde legii lui Hooke şi prin el se descriu fenomenele elastice, iar termenul $\eta \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}$ corespunde legii lui Newton prin care se descriu fenomenele vîscoase. Prin combinarea sub forma (9) a acestor două legi, obţinem legea constitutivă a corpului vîscoelastic de tip Kelvin.

Pentru integrarea ecuaţiilor (5) în algebra de convoluţie K'_+, vom aplica transformata Laplace, evident ţinînd seama de relaţia (9), care se consideră în spaţiul distribuţiilor. Astfel obţinem :

$$L[\sigma] = L[\varepsilon]\,(E + \eta P)$$

de unde

$$\varepsilon = \sigma * \frac{1}{\eta}\, \theta \mathrm{e}^{-\frac{E}{\eta}t}, \tag{10}$$

deoarece $L[\theta \mathrm{e}^{-\frac{E}{\eta}t}] = \dfrac{1}{p + \dfrac{E}{\eta}}$.

Distribuţia de fluaj se determină dacă considerăm în (10) $\sigma = \sigma_0 \theta(t)$. În consecinţă avem :

$$\varphi(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \theta * \frac{1}{\eta}\, \theta \mathrm{e}^{-\frac{E}{\eta}t} = \frac{\theta}{\eta} \int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)}\, \mathrm{d}\tau = \frac{\theta}{E}\,(1 - \mathrm{e}^{-\frac{E}{\eta}t}). \tag{11}$$

Scanned with OKEN Scanner

Analog, considerînd $\varepsilon = \varepsilon_0 \theta(t)$, din (9) obţinem expresia distribuţiei de relaxare :

$$\psi(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = E\theta + \eta\delta(t). \tag{12}$$

Între distribuţiile de fluaj şi de relaxare date de relaţiile (11) şi (12), există relaţiile :

$$\varphi * \psi = \theta t, \quad \varphi'' * \psi = \delta, \quad \varphi * \psi'' = \delta. \tag{13}$$

Pentru demonstrarea acestor formule este suficient să arătăm una din ele. Avem astfel :

$$\varphi' = \frac{\delta(t)}{E}(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}) + \frac{\theta}{\eta} e^{-\frac{E}{\eta}t} = \frac{\theta}{\eta} e^{-\frac{E}{\eta}t}$$

$$\varphi'' = \frac{1}{\eta}\delta - \frac{E}{\eta^2}\theta e^{-\frac{E}{\eta}t}$$

de unde

$$\varphi'' * \psi = \delta - \frac{\theta}{\eta} E e^{-\frac{E}{\eta}t} + \frac{E}{\eta}\theta - \frac{E^2}{\eta^2}\theta * \theta e^{-\frac{E}{\eta}t} = \delta$$

deoarece conform relaţiei (11) avem

$$\frac{\theta}{\eta} * \theta e^{-\frac{E}{\eta}t} = \frac{\theta}{E}(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}).$$

În general putem enunţa :

PROPOZIŢIA 1. *Dacă pentru* $t \leqslant 0$, *un corp vîscoelastic unidimensional este în stare naturală* ($\sigma = \varepsilon = 0$), *atunci distribuţia de fluaj şi de relaxare satisfac relaţia* :

$$\varphi * \psi = \theta t. \tag{14}$$

Demonstraţie. Prin eliminarea lui ε între ecuaţiile (5) obţinem :

$$\sigma * [\delta - (\varphi * \psi)''] = 0. \tag{15}$$

Produsul $\varphi * \psi$ există deoarece distribuţiile φ şi ψ au suporturile în R_+. În consecinţă şi distribuţiile σ şi ε, conform relaţiilor (8), au suporturile în R_+, fapt pentru care relaţia (15) reprezintă o ecuaţie de convoluţie în algebra K'_+.

Deoarece $\sigma \neq 0$ şi algebra de convoluţie K'_+ nu are divizori ai lui zero, obţinem din (15) :

$$(\varphi * \psi)'' = \delta. \tag{16}$$

Ţinînd seama că operatorul $\frac{d^2}{dt^2}$ în K'_+, are ca soluţie fundamentală distribuţia θt, deducem din (16) relaţia :

$$\varphi * \psi = \delta * \theta t = \theta t$$

şi cu aceasta propoziţia este demonstrată.

Scanned with OKEN Scanner

Consecința 1. Distribuțiile φ și ψ sînt inversibile în K'_+ și există relațiile :

$$(\varphi)^{-1} = \psi'', \quad (\psi)^{-1} = \varphi'', \quad (\varphi')^{-1} = (\psi')^{-1}. \tag{17}$$

Într-adevăr, relația (16) se poate scrie :

$$\varphi * \psi'' = \delta, \quad \psi * \varphi'' = \delta, \quad \varphi' * \psi' = \delta \tag{18}$$

ceea ce demonstrează faptul că φ și ψ sînt inversibili în K'_+ și există relațiile (17).

Putem da de asemenea expresia generală a distribuțiilor de fluaj și de relaxare corespunzătoare legii constitutive (1) a corpului vîscoelastic unidimensional.

PROPOZIȚIA 2. *Dacă un corp vîscoelastic unidimensional, pentru $t \leqslant 0$ este în stare naturală, iar legea constitutivă este dată de relația* (1), *atunci distribuțiile de fluaj și de relaxare au expresiile:*

$$\varphi = \theta * P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \mathscr{E}_Q = \mathscr{E}_Q * P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \theta$$

$$\psi = \theta * Q\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \mathscr{E}_P = \mathscr{E}_P * Q\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \theta, \tag{19}$$

unde $\mathscr{E}_P$, $\mathscr{E}_Q$ reprezintă, respectiv, soluțiile fundamentale ale operatorilor $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$, $Q\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$ în algebra de convoluție K'_+.

Demonstrație. În baza relațiilor (1) și (5) avem :

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \psi' * \varepsilon = Q\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \varepsilon,$$

de unde

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \psi' = Q\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \delta \tag{20}$$

deoarece algebra K'_+ nu are divizori ai lui zero. Notînd cu $\mathscr{E}_P$ soluția fundamentală a operatorului $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$ în K'_+, din (20) obținem :

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \psi' * \mathscr{E}_P = \psi' = Q\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \mathscr{E}_P. \tag{21}$$

Cum soluția fundamentală a operatorului $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ în K'_+ este distribuția θ, din relația (21) avem :

$$\psi = \theta * Q\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \mathscr{E}_P = \mathscr{E}_P * Q\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \theta. \tag{22}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe baza simetriei formulelor (1) și (5), obținem :

$$\varphi = \theta * P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\mathscr{E}_Q = \mathscr{E}_Q * P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\theta, \tag{23}$$

unde $\mathscr{E}_Q$ reprezintă soluția fundamentală a operatorului $Q\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$, în algebra de convoluție K'_+.

Vom ilustra propozițiile stabilite pe modelul Maxwell de corp vîscoelastic unidimensional. Legea constitutivă a unui asemenea corp este dată de relația :

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{E}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\eta}\sigma. \tag{24}$$

Deci operatorii diferențiali $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$, $Q\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$ vor fi :

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{1}{E}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\eta}$$

$$Q\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}. \tag{25}$$

În consecință, soluțiile fundamentale în K'_+ au expresiile :

$$\mathscr{E}_P = \theta E \mathrm{e}^{-\frac{E}{\eta}t} \tag{26}$$

$$\mathscr{E}_Q = \theta.$$

Conform formulelor (22) și (23) vom obține pentru distribuțiile de **fluaj** și de relaxare formulele :

$$\psi = \theta E \mathrm{e}^{-\frac{E}{\eta}t} * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta = \theta E \mathrm{e}^{-\frac{E}{\eta}t} * \delta = \theta E \mathrm{e}^{-\frac{E}{\eta}t}$$

$$\varphi = \theta * \left(\frac{1}{E}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\eta}\theta\right) = \frac{1}{E}\theta + \frac{1}{\eta}\theta * \theta = \frac{1}{E}\theta + \frac{1}{\eta}\theta t. \tag{27}$$

Remarcăm că parametrul $t^* = \frac{\eta}{E}$ joacă aici rolul unui timp de **relaxare.**

În privința relației (14), putem scrie :

$$\varphi * \psi = \theta E \mathrm{e}^{-\frac{E}{\eta}t} * \left(\frac{1}{E}\theta + \frac{1}{\eta}\theta t\right) = \theta * \theta \mathrm{e}^{-\frac{E}{\eta}t} + \frac{E}{\eta}\theta \mathrm{e}^{-\frac{E}{\eta}t} * \theta t.$$

În baza relațiilor :

$$\theta * \theta \mathrm{e}^{-\frac{E}{\eta}t} = \frac{\eta}{E}\theta\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{E}{\eta}t}\right)$$

$$\theta t * \theta \mathrm{e}^{-\frac{E}{\eta}t} = \frac{\eta}{E}\theta\left(t + \frac{\eta}{E}\mathrm{e}^{-\frac{E}{\eta}t} - \frac{\eta}{E}\right)$$

obținem :

$$\varphi * \psi = \theta t.$$

Scanned with OKEN Scanner

Bibliografie

1. Antosik P., Mikusiński J., Sikorski R., *Theory of distributions. The sequential approach.* Amsterdam — Warsaw — 1973.
2. Arsac J., *Sur l'approximation des formes lineaires.* Chiffres, *3* (1963).
3. Balabanian N., Bickart T. A., *Electrical Network theory.* John Wiley & Sons., Inc., 1969.
4. Bateman H., Erdélyi A., *Tables of integral transforms.* Vol. 1., McGraw-Hill Book Co., Inc. New York—Toronto—London, 1954.
5. Bellman R., *Introduction to matrix analysis.* McGraw-Hill Book Company, I. N. C. New York—Toronto—London, 1960.
6. Berg Lothar, — *Generalized convolutions.* Math. Nachr. **72**, (1976), 239—245.
7. Berge C., *Espaces topologiques, functions multivoques.* Dunod, Paris, 1966.
8. Bochner S., *Positive zonal functions on spheres.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., *40* (1954), 1141—1147.
9. Brédimas, Antoine, — *La différentiation d'ordre complexe, le produit de convolution généralisé et le produit canonique pour les distributions.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. **A—B, 282** (1976), *1*, Aii, A 37—A 40.
10. Bourbaki N., *Espaces vectoriels topologiques.* Hermann, Paris, 1953.
11. Bremermann H., *Distributions, complex variables and Fourier transforms.* Addison — Wesley Publ. Co., Reading, Massachusetts, 1965.
12. Cherruault Y., *Approximation d'opérateurs linéaires et applications.* Dunod, Paris, 1968.
13. Corduneanu C., *Funcții aproape periodice.* Edit. Acad. R. S. R., București, 1961.
14. Cristescu R., *Elemente de analiză funcțională și introducere în teoria distribuțiilor.* Edit. tehnică, București, 1966.
15. — *Spații liniare topologice.* Edit. Academiei R. S. R., București, 1974.
16. Cristescu R., Marinescu Gh., *Applications of the theory of distributions.* București, Ed. Academiei; London, New York—Sydney—Toronto, John Wiley & Sons, 1973.
17. Danon Chaim, Leviatan Dany, *A representation theorem for convolution transform with determining function in L^p.* Pacif. J. Math. **62** (1976), *1*, 81—86.
18. Dimovski I., *Foundations of operational calculi for the Bessel — Type differential operators.* Serdica, Bulgarical mathematical publications, **1**, *1 KH* (1975).
19. Dufresnoy J., *Sur le produit de composition de deux fonctions.* Comptes Rendus Ac. Sci. 225 (1947), 857—859.
20. Dunford N., Schwartz J., *Linear operators.* New-York, 1968.
21. Edwards R. E., *Functional Analysis.* Holt. Rinehart and Wiston. New York, 1965.
22. Ehrenpreis L., *Solution of some problems of divisi n.* I, Amer. Journal of Math., *76* (1954), p. 883—903.
23. — *Mean periodic functions.* I, Amer. Journal of Math., *77* (1955), p. 293—327.
24. — *The division problem for distribution.* Proc. Nat. Acad. Sc. *41—10* (1955), p. 756—758.
25. — *Completely inversible operators.* Proc. Nat. Acad. Sc. *41—11* (1955), p. 945—946.
26. Erdélyi A., *Calcul opérationnel et fonction généralisées.* Dunod, Paris, 1971.
27. Friedman A., *Generalized functions and partial differentiäl equations.* Prentice-Hall, INC. Englewood Cliffs, N. J., 1963.
28. Gantmacher F. R., *Théorie des matrices.* Tome 1, 2. Dunod, Paris, 1966.
29. Garsoux J., *Espaces vectoriels topologiques et distributions.* Paris, Dunod, 1963.
30. Gilewski J., Urbanik K., *Generalized convolutions and Generating functions.* Bull. Acad. Sci. Polon Math. Astr. Phys., *16* (1968), 481—487.
31. Godunov S., *Équations de la physique mathématique.* Éditions Mir, Moscou, 1973.
32. Guelfand I. M., G. E. Chilov, *Les distributions.* Tome 3. Paris, Dunod, 1965.
33. — *Les distributions.* Tome 1. Paris, Dunod, 1962.
34. — *Les distributions.* Tome 2. Paris, Dunod, 1964.
35. Halanay A., Wexler D., *Teoria calitativă a sistemelor cu impulsuri.* Edit. Acad. R. S. R., București, 1968.
36. Hartman P., *Ordinary differential equations.* John Wiley & Sons New-York—London. Sydney, 1964.

Scanned with OKEN Scanner

The Convolution Product and Its Applications

(Abstract)

The paper deals with one of the most important compositions of functions and distributions, the convolution product and its applications in the field of symbolic calculation, in that of mathematical physics, in electrotechnics, and in distortable solid mechanics.

With a view to making possible the reading of the book independent of other treatises and monographs, in the first chapter are given the fundamental notions regarding the construction of topological vector spaces, laying particular stress on local convex spaces. These lie at the basis of the distributions theory, within whose framework the properties and applications of the convolution product are presented. At the end of this chapter the most important notions in the theory of distributions are listed.

In the second chapter, the general properties of the convolution product for functions and distributions are presented as well as the results regarding their approximation and regulation.

The study of Laplace and Fourier integral transforms, of Fourier series and of periodic distribution are comprised in the third chapter.

The fourth chpater is devoted to convolution equations and to convolution algebra in K'_+.

Here are presented the applications of this algebra to ordinary differential equations, integro-differential equations, partial derivative equations, the solution of the Cauchy problem, as well as the fundamental solutions for wave equations, telegraphists' equation for lines without distortion and heat equation.

The last chapter contains varied applications of the convolution product in electrotechnics and mechanics, showing the importance of K'_+ convolution algebra in connection with the study of differential equations, of determining the solutions of linear vibrating systems as well as with the study of the viscoelastic solid and of inductively coupled circuits.

Scanned with OKEN Scanner

Contents

Preface 5

Chapter 1. **Topological vector spaces** 9

§ 1. Remarkable sets in vector spaces 9
1. Introduction 9
2. Remarkable sets in vector spaces 9

§ 2. Standard vector spaces. Metric spaces 14
1. Linear functions 14
2. Seminorm. Properties 15

§ 3. Topological vector spaces 21
1. Elements of general topology 21
2. The topology of metric spaces 22
3. Axioms of topological vector spaces. Locally convex spaces 24

§ 4. Function spaces 28
1. Classes of functions, generalizing and notations. The L^P space 28
2. Fundamental spaces 33

§ 5. Distribution space 40

Chapter 2. **The convolution product** 53

§ 1. The convolution product for functions 53
1. The convolution in L^P spaces. General properties . . 53
2. Regularizing and approximation functions with help of convolution product 62
3. Algebra of convolution $C(R_+)$ 70

§ 2. The convolution product for distributions 77
1. The direct product for functions and distributions. . . 77
General properties 77
2. The convolution product for distributions. Criteria of existence. General properties 83
3. Regularizing and approximation distributions 91
4. Convolution of distribution that depend upon a parameter. 99

Chapter 3. **Integral transforms and periodic distributions** . . . 109

§ 1. Fourier transforms 109
1. The Fourier transforms for functions. The Fourier transforms of space S 109

Scanned with OKEN Scanner

2. The Fourier transforms of distribution for S' space . . 119

§ 2. The Laplace transforms 124
1. The Laplace transforms for functions and distributions 124

§ 3. Periodic distributions 129
1. Introduction 129
2. Periodic functions, periodic distribution and periodic partition of unity 130
3. Trigonometric series and periodic distributions . . . 135
4. Fourier's series for distribution 142

Chapter 4. **Convolution equations** 149

§ 1. The convolution algebras and equations. General properties 149

§ 2. The convolution equations in K'_+ 155
1. Convolution algebra in K'_+ 155
2. Applications of convolution algebra to ordinary differential equations 158
3. Integrodifferential equations by convolution type . . 172

§ 3. Fundamental solutions and solving the Cauchy problem 178

§ 4. Fundamental solution and Cauchy problem for waves equation, telegraphists' equations for lines without distortions 186
1. Waves equation 186
2. Telegraphists' equations for lines without distortions . 193
3. Warmth equation 195

Chapter 5. **Applications of the convolution product** 197

§ 1. Application in electrotechnics 197
1. Volume and area potential of electro-static field . . . 197
2. Inductively coupled circuits 200
3. Quadrupoles 207

§ 2. Applications in mechanics 210
1. Linear vibrating systems 210
2. Fundamental solution corresponding to solving in displacement for static problem of elastic space 215
3. Visco-elastic solid 219

Bibliography 225

Scanned with OKEN Scanner

Redactor: LUMINIȚA ZORILESCU
Tehnoredactor: SONIA BÂRZEANU

Bun de tipar 8. XII. 1978. Tiraj 2200 ex. Format 16/70 × 100. Coli de tipar 14,50. C.Z. pentru biblioteci mari {*512. 8 : 513. 83* / *513. 83 : 512. 8*

C.Z. pentru biblioteci mici 512. 8 : 513. 83

c. 1745 Întreprinderea poligrafică Informația, str. Brezoianu nr. 23—25, București
REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

Scanned with OKEN Scanner

Între mijloacele moderne de calcul în domeniul matematicilor pure şi aplicate şi al modelării fenomenelor mecanice, electrice şi reologice, un loc central îl ocupă algebrele de convoluţie.

Produsul de convoluţie care constituie o compunere specială de distribuţii, a determinat crearea unui instrument matematic puternic de investigaţie, unitar şi general, care prin calculul simbolic şi prin proprietăţile şirurilor regularizate, reprezintă cadrul natural al rezolvării unor probleme la limită privind studiul solidelor deformabile, sistemelor vibrante liniare şi circuitelor electrice.

Lucrarea prezintă în mod sistematic ***rezultate fundamentale*** precum ***şi contribuţii originale*** ale autorului în strînsă legătură cu aplicaţii ***în domenii variate ale mecanicii, electrotehnicii etc.***

Scanned with OKEN Scanner